CAPITULO SIETE

Modo deslizante integral

La propiedad fuerte del control de modo deslizante convencional con respecto a variaciones de parámetros y perturbaciones externas del sistema puede ser lograda solamente después de la aparición del modo deslizante. Durante la fase alcanzable, sin embargo, no hay garantía de fortaleza. El modo deslizante integral busca eliminar la fase alcanzable forzando el modo deslizante por todas partes de la respuesta del sistema entero. Diferente del diseño tradicional aproximado, el orden de la ecuación del movimiento es igual al orden del sistema original, mejor que reducida por la dimensión de la entrada de control. Como un resultado la fortaleza del sistema puede ser garantizado iniciando del ejemplo del tiempo inicial. Formulaciones uniformes de este nuevo principio de diseño de modo deslizante serán desarrolladas en este capítulo. Esto es mostrado con ejemplos, tal que este esquema generalizado de modo deslizante integral capacita una mira amplia de áreas de aplicación incluyendo control en robótica y manejadores eléctricos. El concepto de modo deslizante integral puede también ser extendido a construir un nuevo tipo de estimador de perturbación el cual resuelve el problema de golpeteo sin pérdida de fortaleza y exactitud del control (sección 8.5). Detalles adicionales en modo deslizante integral pueden ser encontrados en Utkin y Shi (1996).

7.1 Motivación.

El modo deslizante juega un rol dominante en la teoría de los sistemas variable-estructura (VSS). La idea esencial de diseñar algoritmos de control VSS consiste en ejecutar el modo deslizante en alguna variable del espacio del sistema. Tradicionalmente, esas variables son construidas como la intersección de hipersuperficies en el estado espacial. Este dominio de intersección es normalmente llamado una variable conmutable. Una vez que el sistema alcanza el plano conmutable, la estructura de lazo retroalimentado es adaptablemente alterado para "deslizar" el estado del sistema a lo largo del plano conmutable; la respuesta del sistema depende después de eso en el gradiente del plano conmutable y permanece insensible a las variaciones de parámetros y perturbaciones externas del sistema bajo el nombre de "condiciones semejantes" (sección 3.4). El orden de la ecuación de movimiento en modo deslizante es igual a (n-m) con n siendo la dimensión del estado del espacio y m la dimensión de la entrada de control. Sin embargo, durante la fase alcanzable, antes de que ocurra el modo deslizante, el sistema no posee tal propiedad de insensibilidad, de aquí en adelante la insensibilidad no puede ser asegurada por todo en la respuesta entera. La fortaleza durante la fase alcanzable es normalmente mejorada por alta ganancia de control retroalimentado. Los inevitables problemas de estabilidad limitan la aplicación de tales esquemas de alta ganancia de control retroalimentado.

Como una extensión de esquemas de modo deslizante tradicional, el concepto de modo deslizante integral concentra una fortaleza durante la respuesta entera. El orden de la ecuación de movimiento en este nuevo tipo de modo deslizante es igual a la dimensión de la planta modelo. Así que, el modo deslizante es establecido sin una fase alcanzable implicando que la no variación del sistema a incertidumbre parámetrica y perturbaciones externas es garantizada empezando del instante del tiempo inicial. Este capítulo generaliza el concepto de control de modo deslizante y da énfasis a la filosofía de los antecedentes usados para desarrollar tales sistemas nuevos de variable-estructura.

Asumimos, aquí que ya hay un sistema ideal consistiendo de una planta modelo nominal y un control retroalimentado diseñado propiamente. A este control existente, un término discontinuo que es añadido basado en el modo deslizante integral para asegurar el funcionamiento deseado a pesar de la incertidumbre paramétrica y de perturbaciones externas. Los ejemplos de diseño en algunas áreas de aplicación son dados para ilustrar la metodología de esta filosofía de diseño. La idea básica del modo deslizante integral para sistemas lineales puede ser encontrada en Ackermann y Utkin (1994).

El modo deslizante integral puede ser también empleado para prevenir "golpeteo" en un lazo de control, frecuentemente causado por controladores de excitando dinámico discontinúo sin modelar. Para la prevención de "golpeteo", el término de control discontinuo es un filtro pasabajas antes de ser alimentado a la plante, así desplazando la discontinuidad a un lazo auxiliar de control sin dinámicas no modeladas puede ser excitado. El control filtrado actúa como un compensador de perturbación y preserva la propiedad de invariabilidad del modo deslizante. El aspecto de la prevención de "golpeteo" del modo deslizante integral es discutido en detalle en la sección 8.5.

7.2 EXPOSICIÓN DEL PROBLEMA.

Para un sistema dinámico dado representado por la ecuación estado-espacio

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \tag{7.2.1}$$

con $x \in R^n$ siendo el vector de estado y $u \in R^m$ siendo el vector de control de entrada (*rango* $B(x) = m$), suponer que existe una ley de control de retroalimentación $u = u_o(x)$, la cual puede ser continua o discontinua, tal que el sistema (7.2.1) puede ser estabilizado de una manera deseada (ejem. su trayectoria de estado sigue una trayectoria de referencia con una exactitud dada). Denotamos este sistema de lazo cerrado ideal como:

$$\dot{x}_0 = f(x_0) + B(x_0)u_0 \tag{7.2.2}$$

donde x_o representa la trayectoria de estado del sistema ideal bajo control u_o. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el sistema (7.2.1) opera bajo condiciones de incertidumbre que pueden ser generadas por variación de parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas. Bajo esta consideración, la trayectoria real del sistema de control de lazo cerrado puede ser resumida por

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + h(x,t) \tag{7.2.3}$$

en la cual el vector *h(x,t)* comprende la perturbación debida a la variación de parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas y es asumido para cumplir las siguientes condiciones semejantes (sección 3.4):

$$h(x,t) \quad \in \quad spam[B(x)\} \tag{7.2.4}$$

o equivalentemente,

$$h(x,t) = B(x)u_h \ldots con \ldots u_h \in R^m \tag{7.2.5}$$

En otras palabras, control *u* es asumido para ser apto para influir en todas las componentes del vector *h(x,t)* a través de la matriz de control *B(x).*

Asumiendo que *h(x,t)* es limitada y que un límite superior puede ser encontrado como

$$|h_i(x,t)| \leq h_i^+(x,t) \ldots\ldots (i = 1,...,n) \tag{7.2.6}$$

con h_i^+ *(x,t)* siendo funciones escalares positivas conocidas. El reto de diseño de control así llaga a ser: Encontrar un control bajo *u(x,t)* tal que las trayectorias del sistema (7.2.3) satisfacen $x(t) = x_o(t)$ empezando del instante de tiempo inicial, ejemplo $x(0) = x_o(0)$.

7.3 PRINCIPIOS DE DISEÑO.

Para el sistema (7.2.3), primero rediseñamos la ley de control a ser

$$u = u_0 + u_1 \tag{7.3.1}$$

Donde $u_o \in R^m$ es el control ideal definido en (7.2.2) y $u_1 \in R^m$ es diseñado para rechazar el término de perturbación *h(x,t).* La sustitución de la ley de control (7.3.1) en (7.2.3) da

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0 + B(x)u_1 + h(x,t) \tag{7.3.2}$$

Ahora definimos una variable deslizante como

$$s = s_0(x) + z, \qquad con \qquad s, s_0(x), z \in R^m \tag{7.3.3}$$

la cual consiste de dos partes: la primera parte $s_o(x)$ puede ser diseñada como una combinación lineal de los estados del sistema similar al diseño convencional de modo deslizante; la segunda parte introduce el término integral y será determinado abajo.

La filosofía del modo deslizante integral es: En orden para lograr $x(t) = x_o(t)$ en todas las veces $t > 0$, el control equivalente de u_1, denotado por u_{1eq}, debería completar

$$B(x) = u_{1eq} = -h(x,t) \tag{7.3.4}$$

o, en términos de (7.2.5)

$$u_{1eq} = -u_h \tag{7.3.5}$$

El control equivalente u_{1eq} describe exactamente las trayectorias del sistema cuando "se desliza" a lo largo de la variable $s_o(x) = 0$ en (7.3.3). Ver también la sección 2.3 o Utkin (1992) para detalles de la derivación matemática del control equivalente.

En orden para definir adecuadamente la variable auxiliar $z(x,t)$ en (7.3.3) para lograr (7.3.5) poner la derivada con respecto al tiempo de s igual a cero,

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{z} = \frac{\partial s_0}{\partial x}\{f(x) + B(x)u_0(x) + B(x)u_{1eq}(x) + B(x)u_h\} + \dot{z} \tag{7.3.6}$$

Para asegurar el requerimiento (7.3.5), se define

$$\dot{z} = -\frac{\partial s_0}{\partial x}\{f(x) + B(x)u_0(x)\}, \qquad z(0) = -s_0(x(0)) \tag{7.3.7}$$

donde la condición inicial $z(0)$ es determinada basada en el requerimiento $s(0) = 0$. En otras palabras, el modo deslizante es para ocurrir empezando del ejemplo de tiempo inicial. Puesto que la ecuación (7.3.5) es satisfecha, la ecuación de movimiento del sistema en modo deslizante será:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0(x) \tag{7.3.8}$$

similar a las trayectorias del sistema ideal (7.2.2)

Definición 7.1: Modo deslizante integral.

Un modo deslizante es dicho para ser un modo deslizante integral si su ecuación de movimiento es del mismo orden que el sistema original, (ejem. el orden del movimiento deslizante es igual a *n*).

El control u_1 en (7.3.1) es definido para aplicar el modo deslizante a lo largo de la variable (7.3.3) a través de la función discontinua

$$u_1 = -M(x)sign(s) \tag{7.3.9}$$

donde $M(x)$ es una función escalar positiva para la ganancia de control. Sustituyendo de (7.3.9) y (7.3.7) en (7.3.6) da

$$\dot{s} = \frac{\partial s_0}{\partial x}B(x)u_h - \frac{\partial s_0}{\partial x}B(x)M(x)sign(s) \tag{7.3.10}$$

En la ecuación (7.3.10) s_0 debe ser seleccionada tal que la matriz $(\partial s_0 / \partial x)B(x)$ es *no singular* durante la respuesta entera del sistema. Entonces la función escalar M(x) puede ser seleccionada dependiendo en la propiedad de $(\partial s_0 / \partial x)B(x)$ tal que el modo deslizante es aplicado en la variable $s = 0$ (secciones 2.4 y 3.2).

7.4 PERTURBACIÓN Y ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE.

Una parte crucial de la naturaleza de los esquemas de control de modo deslizante es el control discontinuo. En lazo cerrado, la "conmutación" en la acción de control frecuentemente resulta en oscilaciones de alta frecuencia en implementaciones prácticas. Las dinámicas rápidas, como esas de actuadores y sensores, las cuales fueron olvidadas en los procesos de diseño de control, son excitadas por los por los interruptores de control de modo deslizante, ocurriendo frecuencias altas, pero finitas. Este fenómeno, el cual es común en todos los sistemas de control de alta ganancia, es conocida como golpeteo.

Muchos métodos han sido presentados en la literatura para aligerar el golpeteo. La idea clave es limitar el controlador de ganancia o el controlador de ancho de banda. Una discusión detallada de las causas del golpeteo y de las varias herramientas para prevenir este fenómeno pueden ser encontradas en el capítulo 8. El resto de esta sección es dedicada a una breve descripción de usos del modo deslizante integral para diseñar estimadores y rechazadores de disturbación sin causar golpeteo.

Los controladores de alta ganancia son frecuentemente limitados por dinámicas de lazo, especialmente por dinámicas de actuador impidiendo la implementación directa de esquemas de modos deslizantes. Por otra parte, las entradas de control discontinuo son frecuentemente dictadas por la naturaleza del sistema, por ejem., por modulación convencional de unidades de ancho de pulso (PWM) en electrónica de potencia. Para resolver tales especificaciones contradictorias mezcladas, renombrar que el actual efecto de un controlador discontinuo en una planta dada es igual al promedio de la acción de control, el así llamado control equivalente (sección 2.3).

Con esto en mente, reformular el principio de modo deslizante integral en la sección 7.3 en términos de un estimador de perturbación. En lugar de la ecuación (7.3.1), cambiar la entrada de control a

$$u = u_0 + u_{1eq} \tag{7.4.1}$$

Sin embargo, el control (7.4.1) no puede ser implementado directamente puesto que el valor equivalente del control discontinuo u_1 depende de la perturbación desconocida *h(x,t)* en (7.2.3). Esto fue mostrado en la sección 2.3 que el valor equivalente de un control discontinuo es igual al valor promedio medido por un filtro lineal de primer orden, con el control discontinuo como su entrada. La constante de tiempo del filtro debe ser suficientemente rápida tal que la planta y las dinámicas de perturbación sean permitida a pasar a través del filtro sin retraso significante de fase. Por eso, sustituyendo $u_{1eq} = u_{1av}$ definido por

$$m\dot{u}_{1av} + u_{1av} = u_1 \tag{7.4.2}$$

donde la constante de tiempo m debe hacerse lo suficientemente pequeña para no distorsionar la pequeña componente de la acción conmutada, igual a u_{1eq}. En aplicaciones más prácticas el espectro de la perturbación no coincide con los componentes de alta frecuencia de la unidad conmutable. Pero uno puede ser provocado a preguntar: Si la discontinuidad en el camino del control real es suavizada, ¿cómo puede ser generado el modo deslizante? Más aún, ¿ u_{1av} $(=u_{1eq})$ todavía cancela el término de perturbación u_h ¿ Sí, el modo deslizante puede ser generado; y sí, el término de perturbación es todavía cancelado, si el control discontinuo u_1 es cambiado de la entrada de la planta a la entrada de un sistema dinámico auxiliar. Aquí está la explicación.

Similar a las ecuaciones (7.3.3) y (7.3.7), rediseñando la función conmutable

$$s = s_0(x) + z \tag{7.4.3}$$

con z definido como

$$\dot{z} = -\partial s_0 / \partial x\{ f(x) + B(x)u - B(x)u_1 ....z(0) = -s_0(x(0)) \tag{7.4.4}$$

La derivada con respecto al tiempo de la variable deslizante s en (7.4.3) puede ser calculada como

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \partial s_0 / \partial x\{ f(x) + B(x)u + B(x)u_h \} - \partial s_0 / \partial x\{ f(x) + B(x)u - B(x)u_1 \} \\ &= \partial s_0 / \partial x \cdot B(x)u_h + \partial s_0 / \partial x \cdot B(x)u_1\end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Diseñar el mismo control discontinuo para u_1 como se muestra en (7.3.9) y asumir que la matriz $(\partial s_0 / \partial x)B(x)$ (es no singular durante la respuesta entera del sistema, el modo deslizante puede ser aplicado en el sistema usando los métodos dados en las secciones 2.4 y 3.2. Resolviendo para u_1 después de poner $\dot{s} = 0$ en (7.4.5) revela que $u_{1eq} = -u_h$ mantenido como bien implicando que u_{1av} (= u_{1eq}) es desde luego una estimación del término de perturbación u_h.

En este caso, la ecuación (7.4.4) puede ser interpretada como un proceso interno para generar el modo deslizante definido por (7.4.3); la discontinuidad aparece solamente en el proceso interno, así el no golpeteo es excitado en el camino real del control. Más aún, puesto que u_{1av} cancela la perturbación u_{1h} sin conocimiento preciso del modelo del sistema y parámetros asociados, un alto grado de fortaleza es mantenido. La información necesitada para este esquema de control es el límite superior de la perturbación. Desde un punto de vista conceptual, el modo deslizante integral es usado aquí solamente para estimar la perturbación del sistema preferentemente que el propósito de control. La acción de control a la planta real será continua es engrandecida significativamente por el compensador de perturbación.

7.5 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

La tabla 7.1 lista los cuatro ejemplos de aplicación en esta sección y explica su significado.

Tabla 7.1 Cuatro ejemplos de aplicación y su significado.

Aplicación	Significado
Sistemas lineales de tiempo invariable	Los sistemas lineales de tiempo invariable son un caso especial del principio general propuesto de diseño.
Control de robots manipuladores.	El control fuerte de robots de cuerpo rígido bajo parámetros inciertos.
Implementación de modulación de ancho de pulso para manejadores eléctricos.	La filosofía de diseño del modo deslizante integral puede ser directamente aplicada a sistemas prácticos.
Control de fuerza común para motores	Versión 1: Control de fuerza común para

síncronos magnetizados permanentemente.	motores síncronos magnetizados permanentemente. Versión 2: Uso de estimador de perturbación propuesto para lograr funcionamiento avanzado.

7.5.1 SISTEMAS LINEALES DE TIEMPO INVARIABLE.

Considerando un sistema lineal controlable de tiempo invariable con control escalar

$$\dot{x} = Ax + B(u + d(x,t)) \tag{7.5.1}$$

con vector de estado $x \in \Re^n$, control escalar $u \in \Re$, conocido el sistema de la matriz $A \in \Re^{n \times n}$, donde $B \in \Re^n$ y d(x,t) es una perturbación no linear con límite superior conocido

$$|d(x,t)| < d^+(x,t) \tag{7.5.2}$$

El control de diseño *u*, expresado en la ecuación (7.3.1) como $u = u_0 + u_1$, donde u_o es predeterminado tal que el sistema $\dot{x} = Ax + Bu_0$ sigue una trajectoria dada con exactitud . Por ejemplo, u_o puede ser diseñado como un control lineal estático *retroalimentado* $u_o = -k^T x$ $K \in \Re^n$ en el cual el vector de gana1ncia *k* puede ser determinado por *la colocación del polos por métodos lineales cuadráticos de Gauss*.

Para el diseño de colocación del polos, la *fórmula de Ackermann* (sección 5.4) puede ser usada. Asumiendo que los autovalores deseados para el sistema $\dot{x} = Ax + Bu_0$ donde l_1, l_2, ... l_n son ganancia de control k^T que puede ser determinado explícitamente dependiendo en la fórmula de Ackermann

$$k^T = e^T P(A) \tag{7.5.3}$$

donde $e^T = [0,0,......,0,1][B,AB,...,A^{n-1}B]^{-1}$ y $P(\cdot)$ es el polinomio característico del sistema, definido por $p(l) = (l - l_1)(l - l_2)....(l - l_{n-1})(l - l_n)$

De acuerdo con (7.3.3) y (7.3.7), diseñar la variable deslizante como

$$s = C^T x + z = 0 \qquad (C \in R^n) \tag{7.5.4}$$

con

$$\dot{z} = -C^T(Ax + Bu_0) \qquad z(0) = -C^T x(0) \tag{7.5.5}$$

$(l - l_1)$

En particular, el vector $C \in \Re^n$ puede ser seleccionado para ser igual a $B \in \Re^n$ resultando en

$$s = B^T x + z \tag{7.5.6}$$

y

$$\dot{z} = -B^T Ax - (B^T B)u_0 \qquad z(0) = -B^T x(0) \tag{7.5.7}$$

La derivada con respecto al tiempo de *s* puede ser calculada como

$$\dot{s} = (B^T B)(u_1 + d(x,t)) \qquad (7.5.8)$$

Resolviendo para u_1 por formalidad poniendo $\dot{s} = 0$ demuestra que u_{1eq} = *-d(x,t).* Así la ecuación de movimiento en modo deslizante coincide con el movimiento del sistema ideal $\dot{x} = Ax + Bu_0$ sin perturbación *d(x,t).* Además, puesto que $s(0) = B^T x(0) + z(0) = 0$, el modo deslizante ocurrirá desde el instante de tiempo inicial $t = 0$.

Para un sistema lineal controlable de tiempo invariable $(B \neq 0)$, $C^T B = B^T B > 0$ se mantiene y la segunda parte de control, u_1, puede ser diseñado como

$$u_1 = -m_0(x) sign(s) \qquad (7.5.9)$$

donde $m_o(x) > d^+(x,t)$ deben ser satisfechas tales que las funciones *s* y $\dot{s}$ tengan diferentes signos, implicando que el modo deslizante puede ser aplicado.

Para los sistemas donde solamente las entradas de control discontinuo son permitidas, por ejemplo, para artefactos controlados por conmutaciones como convertidores de potencia, la entrada de control debe ser diseñada como

$$u = -m_0 sign(s) \qquad (7.5.10)$$

en lugar de $u = u_o + u_1$. Para aplicar el modo deslizante, la ganancia de control m_o debe satisfacer

$$m_0 > |u_0| + d^+(x,t) \qquad (7.5.11)$$

El modo deslizante integral también puede ser llamado *modo deslizante de orden completo* (Ackermann y Utkin,1994).

7.5.2 CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES.

El modelo de un robot manipulador de cuerpo rígido (sección 12.1) con n grados de libertad puede ser escrito como

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q}) = t \qquad (7.5.12)$$

donde $M \in R^{nxn}$ es la matriz del conjunto, $N \in R^{nx1}$ es el vector incluyendo fuerzas centrífugas, de gravedad y de Coriolis; $q \in R^{nx1}$ representa el ángulo de unión del vector y $t \in R^{nx1}$ representa el torque del vector de unión.

Usando el método del *torque calculado* basado en el modelo nominal sin perturbaciones, el torque de unión nominal requerido para el control de la trayectoria de la posición de la unión es definido como

$$t_0 = M_0(q)(\ddot{q}_d - K_D\dot{q}_e - K_P q_e) + N_0(q,\dot{q}) \qquad (7.5.13)$$

donde M_o, N_o son los valores nominales de M, N; $K_P \in R^{nxn}$? $K_D \in R^{nxn}$ son definidas positivas, las matrices de ganancia diagonal determinan el funcionamiento del lazo cerrado; y el error de la trayectoria es definido como $q_e = q(t) - q_d(t)$ con $[qd(t))$ $\dot{q}d(t)$ $\ddot{q}d(t)$ siendo la trayectoria deseada y sus derivadas con respecto al tiempo.

Sustituyendo (7.5.13) en (7.5.12) bajo asumir del conocimiento exacto de los parámetros del modelo, por ejemplo $M = M_o$ y $N = N_o$, las dinámicas de error resultantes de lazo cerrado están dadas por

$$\ddot{q}_e + K_D \dot{q}_e + K_P q_e = 0 \tag{7.5.14}$$

implicando que el error de la trayectoria $q_e(t)$ tiende a cero asintóticamente.

Sin embargo, para un robot real con parámetros inciertos $M \neq M_o$ y $N \neq N_o$, el error dinámico es perturbado como

$$\ddot{q}_e + K_D \dot{q}_e + K_P q_e = M_0^{-1} t_P \tag{7.5.15}$$

Donde tp es dada por

$$t_P = (\overline{M}\ddot{q} + \overline{N}) \tag{7.5.16}$$

con $\overline{M} = M_o - M$ siendo el parámetro de error para la matriz $M(q)$ y $\overline{N} = N_o - N$ siendo el parámetro de error para el vector $N(q, \dot{q})$. Así no hay problema en cómo son escogidas las matrices constantes K_P y K_D el error de trayectoria $q_e(t)$ no tenderá a cero.

En orden para suprimir la perturbación causada por modelar con incertidumbre, diseñar un controlador fuerte basado en el principio del modo deslizante integral propuesto y mostrar que la dinámica de error ideal de lazo cerrado está dada por la ecuación (7.5.14) puede ser todavía lograda.

El torque de perturbación t_p contiene $\ddot{q}$ la cual es una función de la entrada de control $t_0 = t_0 + t_1$ así en orden para diseñar la entrada de control t_1 eliminando la perturbación del sistema, es necesario reformular el modelo del sistema tal que el término de perturbación resultante no es una función de control de la entrada t_1?La dinámica ideal del robot con $M = M_o$, $N = N_o$ y $t = t_0$ puede ser escrita en términos de la dinámica de error como

$$\ddot{q}_{e0} = -M_0^{-1} N_0 + M_0^{-1} t_0 - \ddot{q}_d \tag{7.5.17}$$

Para el sistema real (7.5.12) bajo control $t = t_0 + t_1$ el error de dinámica similar al error ideal de la trayectoria (7.5.17) puede ser derivado como

$$\ddot{q}_e = -M^{-1} N + M^{-1} t - \ddot{q}_d \tag{7.5.18}$$

De acuerdo al método de diseño de modo deslizante integral propuesto en las ecuaciones (7.3.3) y (7.3.7), dejar que la función conmutable sea $s = s_o + z$ con

$$s_0 = \begin{bmatrix} C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_e \\ \dot{q}_e \end{bmatrix} \tag{7.5.19}$$

Y

$$\dot{z} = -[C \quad I]\begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ -M_0^{-1}N_0 + M_0^{-1}t_0 - \ddot{q}_d \end{bmatrix} \qquad z(0) = -Cq_e(0) - \dot{q}_e(0) \qquad (7.5.20)$$

donde $C \in R^{nxn}$ es una matriz de ganancia definida positiva e $I \in R^{nxn}$ es una matriz unidad *nxn*.

La derivada con respecto al tiempo de la variable deslizante *s(t)* pueden entonces ser obtenidas por diferenciación de la ecuación (7.5.19) con sustitución de la dinámica de error (7.5.18) y la variable auxiliar z definida en (7.5.20):

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{z} = x_1 + x_2 t_0 + M^{-1}t_1 \qquad (7.5.21)$$

donde $z_1 = (-M_0^{-1}N_0 - M^{-1}N)$ y $z_2 = (-M^{-1} - M_0^{-1})$ son las compañeras entre los parámetros nominales M_0 y N_0 y los parámetros reales del sistema *M(q)* y *N(*q, $\dot{q}$*)*, vistos como un sistema de perturbaciones similar a (7.5.16) en la ecuación (7.5.15). Note que para la derivación de 7.5.21, el torque de unión es compuesto de dos partes adicionales

$$t = t_0 + t_1 \qquad (7.5.22)$$

donde t_0 es definida en (7.5.13) y t_1 es la parte discontinua para eliminar el sistema de perturbaciones. Definir

$$t_1 = -\Gamma_0 sign(s) \qquad (7.5.23)$$

Donde Γ_0 es una constante positiva y diseña una función candidata de Lyapunov *V* = ½ $s^T s$. La derivada con respecto al tiempo de *V* a lo largo de las soluciones de (7.5.21) está dada por

$$\dot{V} = s^T\dot{s} = s^T(x_1 + x_2 t_0) - s^T M^{-1}\Gamma_0 sign(s) \qquad (7.5.24)$$

Puesto que la energía cinética de un robot, por ejemplo, 1/2 $\dot{q}^T M(q)\dot{q}$, es siempre positiva para para $\|\dot{q}\| \neq 0$, la matriz M(q) es definida positiva, y la matriz inversa $M(q)^{-1}$ es definida positiva también.. La ganancia de control Γ_0 puede ser escogida como

$$\Gamma_0 > \frac{\| x_1 - x_2 t_0 \|}{\| M^{-1} \|} \qquad (7.5.25)$$

donde se garantiza $\dot{V}$ *< 0*, implicando que el modo deslizante será aplicado en tiempo finito. La definición de las condiciones iniciales en (7.5.20) como $z(0) = -Cq_e(0) - \dot{q}_e(0)$ elimina el tiempo alcanzable de la variable deslizante. Una vez que el modo deslizante ocurre y el sistema es confinado a la variable *s(t) = 0*, el control equivalente de t_1 puede ser usado para examinar la conducta del sistema. El control equivalente es obtenido para poner formalmente $\dot{s} = 0$, dando

$$t_{1eq} = -M(x_1 + x_2 t_0) \qquad (7.5.26)$$

La sustitución de $t = t_0 + t_{1eq}$ en la ecuación (7.5.12) con el control equivalente (7.5.26) dirige la ecuación de movimiento durante el modo deslizante el cual puede ser simplificado como

$$M_0(q)\ddot{q} + N_0(q,\dot{q}) = t_0 \qquad (7.5.27)$$

El control t_0 en (7.5.13) así, logra las dinámicas de error del lazo cerrado ideal (7.5.14) como si las perturbaciones causadas por la incertidumbre paramétrica no existieron.

7.5.3 MODULACIÓN DE ANCHO DE PULSO PARA MANEJADORES ELÉCTRICOS.

En contraste a los ejemplos en las secciones 7.5.1 y 7.5.2, la filosofía de diseño del modo deslizante integral es directamente explotada para implementar *la modulación de ancho de pulso* (PWM) en un sistema de manejador eléctrico en lugar de aplicar las ecuaciones (7.3.3) y (7.3.7). Sin pérdida de generalidad, un manejador eléctrico alimentado por un convertidor de potencia puede ser descrito por el sistema dinámico afín

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \qquad (7.5.28)$$

donde $x \in R^n$ representa la corriente y las componentes de flujo y $u \in R^m$ representa el control de voltajes tomando sólo dos valores, $-u_o$ y $+u_o$, con u_o siendo el bus de voltaje de DC (también llamado el bus de enlace a enlace). Para el diseño de control de lazo orientado (capítulo 10), la ecuación (7.5.28) es frecuentemente transformada en un sistema alineado de coordenadas rotatorias con uno de los vectores de flujo (rotor de flujo o estator de flujo). Usando la matriz de transformación *T*, un proyector no lineal con entradas senoidales, la ecuación del sistema (7.5.28) puede ser transformada en el nuevo sistema de coordenadas, denotado como (*d, q*):

$$\dot{x}_{dq} = f_{dq}(x_{dq}) + B_{dq}(x_{dq})u_{dq} \qquad (7.5.29)$$

donde u_{dq} es la nueva entrada de control en el sistema de coordenadas *(d,q).* Suponer que el control u_{dq} ha sido determinado para satisfacer las especificaciones dadas. La tarea es, entonces, transformar el control u_{dq} de vuelta al sistema de coordenadas original usando la transformación inversa T^{-1}. Denotar este control transformado como u^* y tenemos

$$u^* = T^{-1}u_{dq} \qquad (7.5.30)$$

Ahora la pregunta asciende a: ¿Cómo obtener el control actual *u* para el sistema (7.5.28), el cual puede tomar solo dos valores discontinuos $-u_o$ y $+u_o$ y ¿debe ser exactamente equivalente a u^*?. La solución es hacer el valor equivalente del control *u* sea igual al valor equivalente de u^*, por ejemplo, $u_{eq} = u^*_{eq}$. Diseñar una variable de modo deslizante

$$s = \int_0^t (u^*(x) - u(x))dx = 0 \qquad (7.5.31)$$

con control asociado

$$u = u_0 sign(s) \qquad (7.5.32)$$

Para una función candidata de Lyapunov $V = 1/2s^T s$, la derivada con respecto al tiempo de V es dada por

$$\dot{V} = s^T \dot{s} = s^T u^* - s^T u_0 sign(s) \qquad 7.5.33)$$

Es obvio que el modo deslizante puede ser aplicado si el bus de voltaje de DC satisface $u_o > || u^* ||$, o en otras palabras, el bus de voltaje de DC debe ser suficiente alto para forzar al movimiento deseado.

Un ejemplo de aplicación de modo deslizante PWM al control de corriente de motores síncronos de magneto permanente (PMSMs) puede ser encontrado en la sección 10.2.3.

7.5.4 CONTROL CORRIENTE FUERTE PARA PMSMs

Para operación de alto rendimiento de motores síncronos de magneto permanente (PMSMs), el control de corriente puede ser implementado usando el así llamado control de campo orientado (FOC) aproximado (el capítulo 10 tiene más detalles). Desde un punto de vista de control, esta aproximación usa una transformación de estado después de la cual las tareas de deslinealización y desacoplado pueden ser ejecutadas fácilmente. Sin embargo, FOC necesita conocimiento preciso de los parámetros del motor. Prácticamente esos parámetros no pueden ser conocidos exactamente puesto que (1) el modelo usado para FOC es un modelo simplificado del motor; (2) los parámetros del motor son normalmente obtenidos por un procedimiento de identificación en el cual los errores están siempre presentes; y (3) esos parámetros pueden variar con la posición del rotor y la temperatura ambiente. Como un resultado, el torque y el flujo (flux) del motor no pueden ser controlados independientemente, en pulsaciones del torque y una baja eficiencia.

Existen dos soluciones para resolver este problema: control adaptivo y control fuerte. El control adaptivo calcula recursivamente los parámetros del motor dependiendo en las mediciones del estado, considerando que el control fuerte trata de suprimir la incertidumbre parámetrica usando altas ganancias de control. El control adaptivo envuelve un alto problema computacional y un problema de convergencia adicional; el control fuerte puede resultar en una baja eficiencia de control y puede excitar dinámicas no modeladas de alata frecuencia. En lo siguiente proponemos dos versiones de aproximaciones de control basadas en modo deslizante integral. Esas estrategias de control pertenecen a la categoría de control fuerte. Sin embargo, como uno puede ver de la segunda versión del diseño de control basado en la estimación de la perturbación descrito en la sección 7.4, el control aproximado es actualmente una adaptación a la perturbación del sistema, resultando en acciones continuas de control convenientes para interface con una unidad PWM.

En el cuadro de referencia de rotación sincrónica (d,q) (la sección 10.2.2 da detalles de cómo modelar un PMSM en diferentes cuadros de coordenadas), las ecuaciones de voltaje de un motor PMSM son expresadas por las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

(7.5.34)

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L}u_d - \frac{R}{L}i_d + w_e i_q$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L}u_q - \frac{R}{L}i_q - w_e i_d - l w_e$$

donde
i_d = d – corriente del eje del estator
i_q = q – corriente del eje del estator
u_d = d – voltaje del eje del estator
u_q = q – voltaje del eje del estator
L = inductancia de la armadura
R = resistencia de la armadura
w_e = velocidad angular eléctrica
l = flujo de enlace magnético permanente

En la práctica, los parámetros L, R y l no son conocidos exactamente. Para el diseño de control, los valores nominales de esos parámetros, denotados como L_0, R_0, y l_0 son usados. En el caso ideal con $L=L_0$, $R=R_0$, y $l = l_0$, nosotros podemos explotar FOC para diseñar el controlador de corriente. Para las corrientes del motor $i_d(t)$ y $i_q(t)$ para trazar las referencias de corriente deseada i_d^* (t) e i_q^* (t), los voltajes de control $u_d = u_{d0}$ y $u_q = u_{q0}$ pueden ser diseñados para lograr el funcionamiento deseado

$$|i_d(t) - i_d^*(t)| < e_d \qquad |i_q(t) - i_q^*(t)| < e_q \qquad (\forall t > t_0) \tag{7.5.35}$$

donde e_d, e_q y t_0 son especificados por el diseñador del control. Sin embargo, en la práctica $L \neq L_0$, $R \neq R_0$, y $l \neq l_0$, y el diseño FOC puede resultar en un error inaceptable de control. Para suprimir la incertidumbre paramétrica, los voltajes de control son aumentados a

$$\begin{aligned} u_d &= u_{d0} + u_{d1} \\ u_q &= u_{q0} + u_{q1} \end{aligned} \tag{7.5.36}$$

Para la primera versión del diseño de control, u_{d1} y u_{q1} son seleccionadas para ser discontinuas, así ellas suprimen la perturbación causada por las discrepancias entre los parámetros verdaderos del motor y los parámetros nominales del motor (los parámetros nominales fueron usados para el diseño FOC de $u_d = u_{d0}$ y $u_q = u_{q0}$):

$$\begin{aligned} u_{d1} &= -M_d \, sign(s_d) \\ u_{q1} &= -M_q \, sign(s_q) \end{aligned} \tag{7.5.37}$$

donde M_d y M_q son las ganancias de control para ser determinadas más tarde. Las variables del modo deslizante s_d y s_q sirven como funciones conmutables y son de la forma integral

$$\begin{aligned} s_d &= s_{d0} + z_d \\ s_q &= s_{q0} + z_q \end{aligned}$$

(7.5.38)

en la cual s_{d0} y s_{q0} son definidas como $s_{d0} = i_d - i_d^*$, $s_{q0} = i_q - i_q^*$; z_d y z_q son dadas como sigue:

$$\dot{z}_d = -(\frac{1}{L_0}u_{d0} - \frac{R_0}{L_0}i_d + w_e i_q) + \frac{di_d^*}{dt}$$
$$z_d(0) = -(i_d(0) - i_d^*(0))$$
$$\dot{z}_q = -(\frac{1}{L_0}u_{q0} - \frac{R_0}{L_0}i_q - w_e i_d - l_0 w_e) + \frac{di_q^*}{dt} \quad (7.5.39)$$
$$z_q(0) = -(i_q(0) - i_q^*(0))$$

con di_d^*/dt y di_q^*/dt siendo provistas por un lazo de control externo, ejemplo un lazo de control de velocidad. Ahora vamos a analizar la estabilidad del sistema y a determinar las ganancias de control M_d y M_q. Primero nosotros tratamos con los d-componentes. Tomando la derivada con respecto al tiempo de s_d tenemos

$$\dot{s}_d = \dot{s}_{d0} + \dot{z}_d = \frac{1}{L}u_{d1} + e_1 u_{d0} - e_2 i_d \qquad (7.5.40)$$

donde $e_1 = (1/L - 1/L_0)$ y $e_2 = (R/L - R_0/L_0)$ Sustituir (7.5.37) en (7.5.40) para obtener

$$\dot{s}_d = -\frac{M_d}{L}sign(s_d) + (e_1 u_{d0} - e_2 i_d) \qquad (7.5.41)$$

Para aplicar el modo deslizante en la ecuación (7.5.41), la ganancia de control discontinuo M_d debe ser seleccionada como

$$M_d > \max\{L\,|e_1 u_{d0} - e_2 i_d|\} \qquad (7.5.42)$$

El lado derecho de esta desigualdad es tomado para ser limitado. Una vez que el modo deslizante es logrado, $s_d=0$ se mantiene; el control equivalente de u_{d1} compensa exactamente a la perturbación en términos de u_{hd} (ver ecuaciones (7.2.5) y (7.3.5)):

$$(u_{d1})_{eq} = -u_{hd} = -L(e_1 u_{d0} - e_2 i_d) \qquad (7.5.43)$$

Derivaciones similares se mantienen para la q-componente, donde $\dot{s}_q$ puede ser dada como

$$\dot{s}_q = \dot{s}_{q0} + \dot{z}_q = \frac{1}{L}u_{q1} + e_1 u_{q0} - e_2 i_q - e_3 w_e \qquad (7.5.44)$$

en la cual e_1 y e_2 son los mismos para la d-componente en la ecuación (7.5.40) y $e_3 = l - l_0$ La sustitución de (7.5.37) en (7.5.44) da

$$\dot{s}_q = \frac{-M_q}{L}sign(s_q) + (e_1 u_{q0} - e_2 i_q - e_3 w_e)$$

(7.5.45)

Aplicar el modo deslizante en la ecuación (7.5.45) requiere

$$M_q > \max\{L\,|e_1 u_{q0} - e_2 i_q - e_3 w_e|\} \tag{7.5.46}$$

De nuevo, el control equivalente de u_{q1}?compensa exactamente la perturbación en términos de u_{hq}:

$$(u_{q1})_{eq} = -u_{hq} = -L(e_1 u_{q0} - e_2 i_q - e_3 w_e)$$

Note que, es diferente $M_{d,}$ la ganancia de control M_q depende de la rapidez eléctrica del rotor w_e si el encadenamiento de flujo?l no es conocido precisamente.

donde el bus de voltaje de DC de un sistema manejador es siempre limitado, la amplitud de los voltajes de control, por ejemplo $\sqrt{u_d^{\,2} + u_q^{\,2}}$ es también limitada, implicando que M_d y M_q no pueden ser seleccionadas arbitrariamente: incrementar M_q lleva a un decremento de M_d. Como las desigualdades (7.5.42) y (7.5.46) se mantienen, el modo deslizante puede ser aplicado. De otro modo la estabilidad del modo deslizante no es garantizada, lo cual significa que los parámetros de incertidumbre no pueden ser compensados completamente. Este es uno de los inconvenientes de la primera versión del diseño de control.

Otra de las desventajas de la primera versión yace en el factor que los resultantes controladores u_d y u_q, son difíciles para implementar por una unidad convencional PWM, puesto que ellos contienen una parte discontinua. Note que el FOC estándar vuelve a yacer en una unidad PWM para adaptar los controladores continuos u_{d0} y u_{q0} para los voltajes de control discontinuos de los motores PMSM. Sin embargo, u_d y u_q definidos en (7.5.36) son una mezcla de partes continuas y discontinuas. Después de la transformación de la coordenada, por ejemplo desde el marco *(d,q)* a el marco del estator (a,b)?resultante en u_a ?y u_b ?y una transformación adicional al marco de coordenadas de fase resultando en u_a , u_b y u_c, ellas deben ser aplicadas a la unidad PWM. Si esos controles contienen una parte discontinua, los saltos repentinos asociados en la proporción debida del PWM puede ser perjudicial para el convertidor de potencia empleado. Este problema puede ser aresuelto por la aproximación del modo deslizante de PWM debido a la acción integral definida (sección 7.5.3). Ahora vamos a modificar el diseño de control para resolver esas desventajas y obtener la segunda versión, la cual está basada en el estimador de perturbación de la sección 7.4.

Los controles u_d y u_q son de forma similar a la ecuación (7.5.36):

$$\begin{aligned} u_d &= u_{d0} + \tilde{u}_{d1} \\ u_q &= u_{q0} + \tilde{u}_{q1} \end{aligned} \tag{7.5.48}$$

donde las funciones continuas $\tilde{u}_{d1}$ y $\tilde{u}_{q1}$ serán determinadas después. Diseñar los controles discontinuos u_{d1} y u_{q1} para tener la misma forma como la dada por la ecuación (7.5.37):

$$\begin{aligned} u_{d1} &= -M_d\, sign(s_d) \\ u_{q1} &= -M_q\, sign(s_q) \end{aligned} \tag{7.5.49}$$

Las funciones conmutables s_d y s_q son también idénticas a las ecuaciones (7.5.38):

$$s_d = s_{d0} + z_d$$
$$s_q = s_{q0} + z_q \qquad (7.5.50)$$

donde los términos integrales z_d y z_q, los cuales implementan el control del modo deslizante integral son de la forma

$$\dot{z}_d = -(\frac{1}{L_0}u_d - \frac{R_0}{L_0}i_d + w_e i_q - \frac{u_{d1}}{L_0}) + \frac{di_q^*}{dt}$$
$$z_d(0) = -(i_d(0) - i_d^*(0)) \qquad (7.5.51)$$
$$\dot{z}_q = -(\frac{1}{L_0}u_q - \frac{R_0}{L_0}i_q - w_e i_d - l_0 w_e - \frac{u_{q1}}{L_0}) + \frac{di_q^*}{dt}$$
$$z_q(0) = -(i_q(0) - i_q^*(0))$$

Las derivadas con respecto al tiempo $\dot{s}_d$ y $\dot{s}_q$ son

$$\dot{s}_d = \frac{-M_d}{L_0} sign(s_d) + (e_1(u_{d0} + \tilde{u}_{d1}) - e_2 i_d)$$
$$\dot{s}_q = \frac{-M_q}{L_0} sign(s_q) + (e_1(u_{q0} + \tilde{u}_{q1}) - e_2 i_q - e_3 w_e) \qquad (7.5.52)$$

Las condiciones para aplicar el modo deslizante en (7.5.52) son

$$M_d > \max\{L_0 \,|\, e_1(u_{d0} + \tilde{u}_{d1}) - e_2 i_d \,|\}$$
$$M_q > \max\{L_0 \,|\, e_1(u_{q0} + \tilde{u}_{q1}) - e_2 i_q - e_3 w_e \,|\} \qquad (7.5.53)$$

Ahora, los controles discontinuos u_d y u_q aparecen solamente en los algorítmos de control, por ejemplo en la computadora de control mejor que en el camino de control real, así M_d y M_q pueden ser seleccionadas tan altas como se requiera para aplicar el modo deslizante. Después de la aparición del modo deslizante, el control equivalente puede ser escrito como

$$(u_{d1})_{eq} = L_0(e_1(u_{d0} + \tilde{u}_{d1}) - e_2 i_d)$$

$$(u_{q1})_{eq} = L_0(e_1(u_{q0} + \tilde{u}_{q1}) - e_2 - e_3 w_e) \qquad (7.5.54)$$

Esas ecuaciones demuestran que los valores equivalentes de u_{d1} y u_{q1} son en verdad igual a las perturbaciones para ser compensadas. Y los valores equivalentes pueden ser obtenidos aplicando los filtros de pasabajas con u_{d1} y u_{q1} como las entradas del filtro (sección 2.3).

Finalmente, los términos de la compensación de la perturbación ~u_{d1} y ~u_{q1} pueden ser obtenidos como

$$\tilde{u}_{d1} = (u_{d1})_{eq}$$
$$\tilde{u}_{q1} = (u_{q1})_{eq} \qquad (7.5.55)$$

Ahora $\tilde{u}_{d1}$ y $\tilde{u}_{q1}$ son continuas y así aceptables para la unidad PMW.

Observacion 7.1

Si las resultantes $\tilde{u}_{d1}$ y $\tilde{u}_{q1}$ son demasiado altas tal que $\sqrt{u_d{}^2 + u_q{}^2}$ excede le voltaje del bus de DC, las perturbaciones del sistema no pueden ser compensadas completamente. Sin embargo, la estimación de la perturbación dada por la ecuación (7.5.54) se mantiene cierta. Este caso indica que las perturbaciones del sistema son demasiado grandes y no pueden ser compensadas completamente por ningún algoritmos de control. €

Otro ejemplo de so del concepto de la estimación de la perturbación será dado en el capítulo 12, demostrando la efectividad de este esquema de control en el control del torque de una unión de un robot flexible. En esta aplicación el momento de inercia del motor del rotor y el enlace, la rigidez de la unión y las fracciones a ambos lados del motor y el enlace se asumen desconocidos.

7.6 RESUMEN

Este capítulo ha desarrollado un nuevo concepto de diseño de modo deslizante: el modo deslizante integral. La formulación uniforme propuesta del modo deslizante integral permite un amplio rango de aplicación. La principal ventaja de este nuevo principio de diseño es que la fortaleza provista por el modo deslizante puede ser garantizada encima de una respuesta entera del sistema empezando del instante de tiempo inicial. Hemos dado énfasis a la idea básica a la filosofía antecedente usada para desarrollar tal nueva aproximación. Y hemos dado ejemplos detallados de aplicaciones practicas. El problema de golpeteo, el cual fue la mayor desventaja del control de modo deslizante, puede ser resuelto usando los algoritmos propuestos, mientras que se preserva la fortaleza provista por el diseño de modo deslizante y la exactitud del sistema de control.

Referencias

ACKERMANN, J. y UTKIN, V. I, 1994, Sliding mode control design based on Ackermann's formula, *proceding of the IEEE Conference on Decision and Control* , Orlando FL, pp. 3622-27.

UTKIN, V., 1992, *Sliding Modes in Control and Optimization*., Berlin: Springer Verlag.

UTKIN, V.,AND SHI, J., 1996, *Integral Sliding Modes in systems operating under uncertainty conditions, proceding of the IEEE Conference on Decision and Control Control*, Kobe, Japan, pp. 4591-96.