

---

# Robótica Avanzada

---



El control en los robots, robots móviles y robots de brazo manipulador ha fascinado a los ingenieros en control por muchas décadas. Los robots son sistemas mecánicos muy complejos con dinámicas altamente no lineales. Debido a que la operación de alto desempeño requiere del diseño de controles no lineales para poder explotar completamente las potencialidades un robot. Después de describir los modelos dinámicos para los robots, en este capítulo primeramente se discutirá el diseño de cuatro controladores en modos deslizantes considerando diferentes alternativas para resolver el problema de seguimiento en trayectorias clásicas. Posteriormente, se estudiará la robótica de control avanzada utilizando el ejemplo del control de seguimiento de gradiente, en donde el movimiento del robot es guiado en línea mediante un campo de potencial artificial para evitar las colisiones con obstáculos en el espacio de trabajo. El capítulo concluye con cuatro ejemplos prácticos del control en modos deslizantes en robótica avanzada.

## 12.1 Modelado Dinámico

Un gran número de problemas de control para sistemas mecánicos, están basados en el control de posición para la ubicación de masas, utilizando una fuerza o un torque como variable de entrada. En lugar de resolver tan solo el problema de dirigir el movimiento del posicionamiento de la variable de salida hacia un valor específico, a menudo la posición de la masa requiere seguir una trayectoria definida. Más niveles de complejidad pueden aparecer al introducir series de masas con dinámicas acopladas, para ser controladas mediante una serie de fuerza/torque de entrada. El caso estándar de la ‘puesta en acción’ se parece a un control fuerza/torque asociado con cada masa primaria y posteriormente aparecen fuerzas/torques desde el acoplamiento estático y dinámico de diferentes masas. El caso típico es un brazo robot o robot manipulador con  $n$  uniones conectadas para  $n$  articulaciones con accionadores generadores de fuerza/torque. Usualmente, la herramienta de último efecto se encuentra en el extremo del brazo para manipular los objetos de acuerdo con las especificaciones de aplicación. El caso de utilizar un número menor de acciones de control que el número de las masa primarias se llama sistema subaccionado y requiere consideraciones extraordinarias. Los ejemplos se presentaron en el capítulo 4.

Las entradas fuerzas/torques son las salidas de los accionadores, a menudo accionadores eléctricos, con su propia dinámica compleja. Las dinámicas del accionador a menudo es despreciada en el primer paso del diseño del controlador para el sistema electromecánico, suponiendo de estos son estables y considerablemente rápidos que las dinámicas inerciales de las masas. Debido a la gran variedad de accionadores, se considerará el

tratamiento de los accionadores de control en la sección 12.2. También, otras dinámicas tales como las estructuras flexibles a menudo omitidas cuando se deriva el modelo básico para los sistemas mecánicos. En la práctica esto conduce a el problema del chattering (parloteo u oscilación en inglés) descrito en el capítulo 8 y una de las soluciones discutidas ahí deberán ser empleadas en los diseños básicos de control delineados en este capítulo.

Antes de diseñar las estrategias de control para un sistema mecánico, deberá derivarse un modelo dinámico que describa los principios básicos de comportamiento. En esta sección se considerarán los sistemas mecánicos holonómicos con restricciones en los movimientos y robots planos con restricciones de movimiento no holonómicos. Se han desarrollado varios métodos para obtener un modelo dinámico basado en las propiedades físicas de los sistemas. Una metodología popular es la formulación Euler-Lagrange para un sistema conservativo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \mathbf{t} \quad (12.1.1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  es un vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  es un vector externo generalizado (de entrada) que relaciona fuerza/torque (excluyendo gravedad), y la *Lagrangiana*  $L = K - P$  es la diferencia entre la energía total cinética (K) y la potencial (P) del sistema. Para detalles y formulaciones alternativas, favor de tomar en cuenta los libros de texto que traten sobre la dinámica de sistemas mecánicos; para sistemas de robot, buscar en Craig (1986) o en Spong & Vidyasagar (1989).

### 12.1.1 Dinámicas inerciales genéricas

Para el propósito del diseño de control genérico considerado en la primera parte de este capítulo, considere un modelo genérico de tiempo continuo, de un sistema robot de dimensión  $n$  totalmente articulado con dinámicas inerciales de la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{t} \quad (12.1.2)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  es un vector de configuración generalizado de variables (de traslación o rotacional),  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  denota una matriz de masa inercial,  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  consta de acoplamientos fuerza/torque entre la masa o con la gravedad y la fricción, y  $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  son las entrada generalizadas fuerza/torque. La ecuación (12.1.2) describe la relación principal entre los movimientos inerciales entre los sistemas de masas, fuerzas/torque internas  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y fuerzas/torque de entrada externa  $\mathbf{t}$ , debido a que es muy satisfactorio para el diseño de la ley de control.

Tradicionalmente, los robots han sido divididos en dos categorías: Robots manipuladores y robots móviles. Usualmente, los robots manipuladores tienen una base fija y consisten de un cierto número de uniones rígidas y rotatorias. Una serie de  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  variables de las  $n$  uniones prescriben la configuración de un robot, también denominado postura del robot. La serie de todas las posibles configuraciones dentro de las limitaciones de la unión física define el espacio de configuración del robot. La cinemática del robot provee un mapeo entre la unión de coordenadas y las coordenadas del mundo físico. Los lugares asociados de un punto dado del manipulador, por ejemplo la punta del efecto final en un mundo de sistemas de coordenadas, define el espacio de trabajo del robot. Observe que pueden resultar múltiples configuraciones en efectos de posiciones finales semejantes. Consecuentemente, el mapeo cinemático inverso entre el lugar de efecto final en las coordenadas

mundiales y el vector de configuración  $q \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  no es único, por lo que se omite el tratamiento de la cinemática inversa y se concentra en el diseño del control en configuración espacial. De nuevo, el lector interesado puede buscar referencias en libros de texto de robótica para un tratamiento detallado de la cinemática del robot en el mapeo cinemático inverso.

La mayoría de los brazos manipuladores tienen una serie de uniones, pero existen también diseños con uniones en paralelo. Los robots móviles, por otro lado, poseen llantas para definir su desplazamiento. Su espacio de trabajo está definido por una serie de puntos que se alcanzan mediante su propia movilidad. La posición definida mediante la orientación de las variables con respecto a una referencia en el sistema de coordenadas del espacio de trabajo definen la configuración de movimiento en un robot. Actualmente, los robots manipuladores y los robots móviles se han combinado para conformar a los manipuladores móviles, por ejemplo con tres grados de libertad para movilidad en el plano y seis grados de libertad para manipulación.

Para un diseño de control, se distingue entre robots holonómicos y no holonómicos. El movimiento de un robot holonómico usualmente es sin restricciones. Todas las uniones pueden moverse arbitrariamente dentro de sus limitaciones físicas y del espacio de trabajo del robot, por ejemplo, solo existe limitación en las variables de posición. Esta clase de robots, descritos en la sección 12.1.2, incorporan a ambos manipuladores y a los denominados robots móviles omni-direccional. Se incluyen casos especiales de interacción entre un robot y los componentes de su espacio de trabajo, y una acción cooperativa entre dos o más robots, requiere un tratamiento especial que va más allá de los objetivos de este libro. Los robots no holonómicos encaran restricciones adicionales de los términos en derivada de las coordenadas de posición  $q \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ , por ejemplo las restricciones en las variables de velocidad. La sección 12.1.3 describe los modelos cinemáticos y dinámicos para los robots no holonómicos.

### 12.1.2 Modelo holonómico del robot

Un ejemplo bien conocido de altas no linealidades, son los sistemas mecánicos completamente automatizados en sus dinámicas son los robots manipuladores con uniones rígidas. Para una gran variedad de sistemas robots holonómicos, la dinámica genérica en (12.1.2) puede ser rescrita en una configuración espacial mediante:

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) = t \quad (12.1.3)$$

donde  $q \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  denota la configuración de unión (traslacional o rotacional) de las  $n$  uniones del robot,  $M(q)$  hace referencia a la matriz de masa inercial,  $V_m(q, \dot{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  comprende a las fuerzas de coriolis y centrípeta, el vector  $F(\dot{q}) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  describe la fricción viscosa y el vector  $G(q) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  restringe a los términos de gravedad. La formulación (12.1.3) sigue directamente desde las ecuaciones de Euler-Lagrange de movimiento y sincroniza libremente la operación manipuladora del robot sin restricciones de movimiento. Craig (1988) revela las siguientes propiedades:

*Matriz de masa*

La matriz cuadrada  $M(q)$  es simétrica, definida positiva, y puede ser escrita mediante

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & \cdots & m_{1n}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n}(q) & \cdots & m_{nn}(q) \end{bmatrix} \quad (12.1.4)$$

con parámetros acotados  $m_{ij}^- \leq m_{ij}(q) \leq m_{ij}^+, 1 \leq i, j \leq n$ . Debido a que  $M(q)$  puede ser acotada mediante:

$$M^- \leq \|M(q)\|_2 \leq M^+ \quad (12.1.5)$$

donde cualquier norma de matriz inducida puede ser utilizada para definir dos escalares conocidos  $0 < M^- \leq M^+$  como acotado. Los escalares conocidos  $M^-$  y  $M^+$  también acota a la inversa de  $M(q)$ :

$$\frac{1}{M^+} \leq \|M^{-1}(q)\|_2 \leq \frac{1}{M^-} \quad (12.1.6)$$

En (12.1.5) y en consecuencia, las dos normas inducidas serán utilizadas como un ejemplo de normas acotadas, sin embargo otras normas podrán ser empleadas. Las dos normas inducidas de la matriz  $M(q)$  se define como:

$$\|M(q)\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda(M^T M)\}} \quad (12.1.7)$$

donde  $\lambda(M^T M)$  denotan los valores característicos de la matriz  $M^T M$ .

*Simetría inclinada*

La derivada con respecto al tiempo de la matriz de masa,  $\dot{M}(q) = dM(q)/dt = (\partial M(q)/\partial q)\dot{q}$ , y la matriz Coriolis/Centrípeta  $V_m(q, \dot{q})\dot{q}$  son simetrías inclinadas, como por ejemplo:

$$y^T (\dot{M}(q) - 2V_m(q, \dot{q}))y = 0 \quad (12.1.8)$$

se mantiene para cualquier vector no cero  $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .

*Acotamientos de los términos dinámicos*

El vector Coriolis/Centripetal  $V_m(q, \dot{q})\dot{q}$  esta acotado por

$$\|V_m(q, \dot{q})\dot{q}\|_2 \leq V^+ \|\dot{q}\|_2 \quad (12.1.9)$$

donde  $V_m^+$  es un valor escalar positivo. La fricción viscosa puede ser acotada mediante escalares positivos  $F^+$  y  $F_0$  :

$$\|F(\dot{q})\|_2 \leq F^+ \|\dot{q}\|_2 + F_0 \quad (12.1.10)$$

El vector de gravedad de igual forma esta acotado mediante un escalar positivo  $G^+$  :

$$\|G(q)\|_2 \leq G^+ \quad (12.1.11)$$

### Ejemplo 12.1 Modelo Holonómico de un manipulador de dos uniones.

Un manipulador planar de dos uniones revolucionadas se utilizará como un ejemplo a través del desarrollo del control en la sección 12.2. El manipulador y las variables asociadas se muestran en la figura 12.1 La geometría de la figura 12.1 revela la cinemática de las dos uniones manipuladoras. La posición del efecto final  $(x_w, y_w)$ , por ejemplo la ubicación de la masa  $M_2$  en el mundo de coordenadas  $(x, y)$  está dado por:

$$\begin{aligned} x_w &= L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y_w &= L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (12.1.12)$$

donde  $q_1, q_2$  denotan los desplazamientos en las uniones y  $L_1, L_2$  son las longitudes entre las uniones. Resolviendo (12.1.12) para el desplazamiento en las uniones como un efecto final de la posición  $(x_w, y_w)$ , se encuentra la cinemática inversa como:

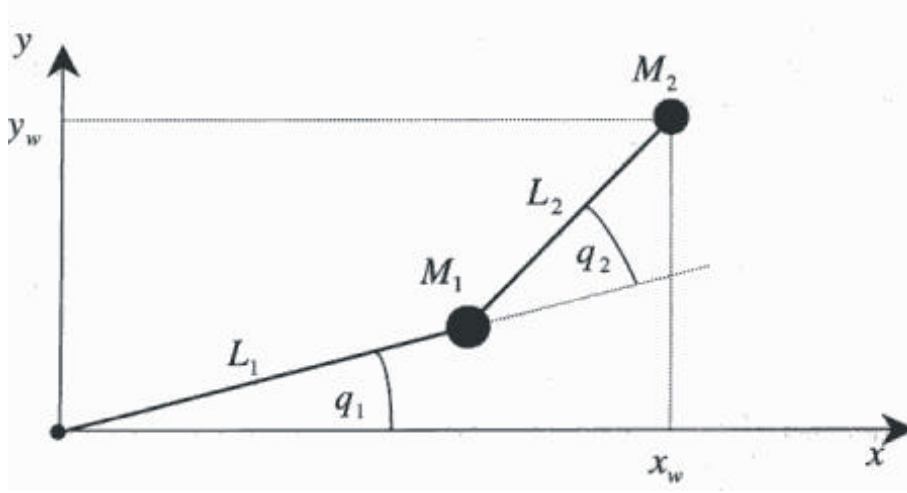
$$q_2 = a \tan 2(D, C) \text{ con } C = \frac{x_w^2 + y_w^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1^2 L_2^2}, \quad D = \pm \sqrt{1 - C^2} \quad (12.1.13)$$

$$q_1 = a \tan 2(y_w, x_w) - a \tan 2(L_2 \sin q_2, L_1 + L_2 \cos q_2)$$

lo cual es obviamente no único debido a las dos opciones de signos de las raíces cuadradas en la variable D. La función  $a \tan 2(\cdot)$  describe la función de arco tangente normalizada en el rango  $\pm 180^\circ$ .

Aplicando una técnica de modelado estándar tal como las ecuaciones Euler-Lagrange se obtiene el modelo dinámico de acuerdo a (12.1.2) como:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (12.1.14)$$



**Figura 12.1** Manipulador de dos uniones de longitud  $L_1$  y  $L_2$ , y uniones de masa concentrada  $M_1$  y  $M_2$ . El manipulador se muestra en configuraciones de uniones  $(q_1, q_2)$ , el cual alcanza su efecto de posición final en  $(x_w, y_w)$  en el mundo de las coordenadas. El manipulador se opera en el plano, por ejemplo a través del eje Z.

con:

$$m_{22} = L_2^2 M_2$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{22} + L_1 L_2 M_2 \cos q_2$$

$$m_{11} = L_1^2 (M_1 + M_2) + 2m_{12} - m_{22}$$

$$n_2 = L_1 L_2 M_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2$$

$$n_1 = -L_1 L_2 M_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_2^2) \sin q_2$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Observe la ausencia de gravedad en los términos de (12.1.15) debido a que el manipulador esta siendo operado en el plano, perpendicular a la gravedad. Para los ejemplos del diseño del controlador de la siguiente sección , se utilizarán los parámetros de la tabla 12.1

**Tabla 12.1** Parámetros del manipulador de dos uniones

$M_1 = 10 \text{ Kg}$	$M_2 = 1 \text{ Kg}$
$L_1 = 1 \text{ m}$	$L_2 = 1 \text{ m}$

Para examinar la propiedad de simetría inclinada de la ecuación (12.1.8), obtenga la derivada de la matriz de masa  $M(q)$  en (12.1.15) para obtener:

$$\dot{M}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2\dot{m}_{12} & \dot{m}_{12} \\ \dot{m}_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (12.1.16)$$

$$m_{12}(q, \dot{q}) = L_1 L_2 M_2 \dot{q}_2 \sin q_2$$

Entonces, separando a la matriz  $N(q, \dot{q})$  en sus componentes de acuerdo a (12.1.3). Debido a la suposición de operaciones planares sin fricción, los términos de gravedad y de fricción son iguales a cero y se obtiene:

$$N(q, \dot{q}) = V(q, \dot{q}) = V_m(q) \dot{q}$$

con:

$$V_m(q) = \begin{bmatrix} -L_1 L_2 M_2 \dot{q}_2 \sin q_2 & -L_1 L_2 M_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ -L_1 L_2 M_2 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

La simetría inclinada desde (12.1.16) y (12.1.17) como:

$$\begin{aligned} & y^T (\dot{M}(q) - 2V_m(q, \dot{q})) y \\ &= L_1 L_2 M_2 \sin q_2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -2\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= L_1 L_2 M_2 \sin q_2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ -2\dot{q}_1 - \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (12.1.18)$$

Suponiendo un conocimiento exacto de los parámetros en la tabla 12.1, pero ignorando toda dependencia entre en las posiciones de las uniones, podemos encontrar los límites superior e inferior para los elementos de las matrices  $M(q)$  y  $N(q, \dot{q})$  en (12.1.15); están enlistados en la tabla 12.2. Utilizando la segunda norma de acuerdo con (12.1.7) resulta en los límites superior e inferior para la matriz de masa  $M(q)$  como se describe en la ecuación (12.1.5):  $M^+ = 0.957Kg - m^2$  y  $M^- = 204.511Kg - m^2$ . La matriz  $N(q, \dot{q})$  puede ser acotada en la parte superior mediante  $N^+ = 2(|\dot{q}_1 \dot{q}_2| + \dot{q}_2^2) \times 1Kg - m^2$ .

**Tabla 12.2** Límites superior e inferior de los elementos en la matriz

$m_{11}^- = 12Kg - m^2$	$m_{11}^+ = 14Kg - m^2$
$m_{12}^- = m_{21}^- = 1Kg - m^2$	$m_{12}^+ = m_{21}^+ = 2Kg - m^2$
$m_{22}^- = 1Kg - m^2$	$m_{22}^+ = 1Kg - m^2$
$n_1^+ = (2 \dot{q}_1 \dot{q}_2  + \dot{q}_2^2) \times 1Kg - m^2$	
$n_2^+ = \dot{q}_2^2 \times 1Kg - m^2$	

### 12.1.3 Robots no holonómicos: Modelado de la tracción delantera de un robot móvil

Robots cuyo movimiento esta sujeto a una serie de restricciones p no integrables que involucran las derivadas con respecto al tiempo del vector de configuración q están clasificadas como sistemas no holonómicos (Neimark & Fufaev, 1972). Las restricciones usualmente toman la forma:

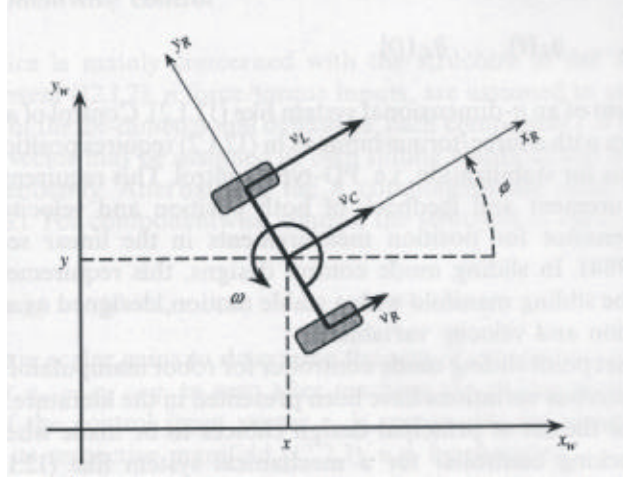
$$G(q)q = 0 \quad (12.1.19)$$

con las columnas independiantes  $(n-p)$  de la matriz  $p \times n$  de la matriz  $G(q)$  formando la base para la condición de restricción no holonómica:

$$\dot{q} = K(q)u \quad (12.1.20)$$

Observe que el número de las entradas de control es menor que la dimensión del sistema, por ejemplo subactuaciones con  $u \in \mathbb{R}^{n-p}$  sigue desde (12.1.19). Considere un módulo de tracción con un eje en común, pero con accionadores en las llantas en forma independiente como un ejemplo de un robot móvil con cinemática no holonómica, como se muestra en la figura 12.2. Suponiendo que no exista deslizamiento en las llantas, el movimiento en cada llanta esta restringida a su dirección longitudinal con velocidades  $V_R$  y  $V_L$ , respectivamente, mediante una simple restricción no holonómica ( $p=1$ ). En otras palabras, el movimiento no puede acontecer a través de los ejes coordenados del robot  $y_R$ . También se observa en la figura 12.2 que la configuración del robot es  $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^3$  ubicado en el mundo de coordenadas  $(x_w, y_w)$ . Las entradas de control son las velocidades en las dos llantas  $V_R$  y  $V_L$ , el cual puede ser trasladado hacia las variables de velocidad de traslación y rotación  $u = (v_c, \omega) \in \mathbb{R}^2$  por conveniencia. El movimiento de las llantas en el marco





**Figura 12.2** Sección de la tracción delantera en un solo eje como ejemplo de cinemática en robots no holonómica. La dirección está restringida por velocidades longitudinales  $V_R$  (derecha) y  $V_L$  (izquierda) a través de los ejes del robot  $X_R$ . El movimiento lateral a través de los ejes  $y_R$  es imposible. Diferencias en las velocidades  $V_R$  y  $V_L$  de las llantas resultan en un movimiento traslación en el robot  $V_C$  y movimiento rotacional  $\omega$ . También se muestra la posición del robot  $(x, y, f)$  de la ecuación (12.1.21) en la región de coordenadas  $(x_w, y_w)$ .

de coordenadas mundiales está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_C \cos f \\ \dot{y} &= v_C \sin f \\ \dot{f} &= \omega\end{aligned}\tag{12.1.21}$$

el cual forma el avance cinemática para este caso.

Para el volante que se muestra en la figura 12.2, suponemos la dinámica inercial en la forma:

$$M\dot{v}_C + N_t(v_C, \mathbf{w}) = \mathbf{t}_t\tag{12.1.22}$$

$$J\dot{\omega} + N_r(v_C, \mathbf{w}) = \mathbf{t}_r\tag{12.1.23}$$

con los escalares positivos  $M$  y  $J$  denotando la masa y la inercia rotacional cerca del eje vertical  $z_w$ ,  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_t, \mathbf{t}_r) \in \mathfrak{R}^2$  siendo las entradas de control, y los escalares  $N_t(\dot{v}_C, \mathbf{w})$  y  $N_r(\dot{v}_C, \mathbf{w})$  comprendiendo todas las dinámicas adicionales. Un modelo dinámico más complicado fue discutido por Bloch (1992).

## 12.2 Control en el seguimiento de la trayectoria

La tarea de control comúnmente aparece en el control del robot es describir una trayectoria dependiente del tiempo:

$$[q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)] \quad (12.2.1)$$

con configuraciones acotadas establecidas en:

$$\dot{q}_d(t) = [\dot{q}_{d1}(t), \dots, \dot{q}_{di}(t), \dots, \dot{q}_{dn}(t)]$$

con velocidades:

$$\ddot{q}_d(t) = [\ddot{q}_{d1}(t), \dots, \ddot{q}_{di}(t), \dots, \ddot{q}_{dn}(t)]$$

y aceleraciones:

$$\ddot{q}_d(t) = [\ddot{q}_{d1}(t), \dots, \ddot{q}_{di}(t), \dots, \ddot{q}_{dn}(t)]$$

para cada componente de un sistema n dimensional tal como (12.1.2). El control de un sistema mecánico de segundo orden con entradas fuerza/torque como en (12.1.2) requieren retroalimentación de posición y velocidad como una base en la estabilización, por ejemplo el tipo de control PD. Este requerimiento puede obtenerse mediante medición y retroalimentación de las variables de posición y velocidad o mediante un compensador de adelanto para mediciones de posición en el sentido lineal (Arimoto y Miyazaki, 1984). En los diseños de control en modos deslizantes, este requerimiento se refleja en la selección de la región de deslizamiento con un movimiento estable, diseñada como una combinación (lineal) de variables de velocidad y posición.

Desde la primera puesta del controlador en modos deslizantes para manipuladores con robot sugerido por Young (1978), se han presentado numerosas variaciones en la literatura. En consecuencia, se han investigado una serie de opciones del diseño principal para el controlador en modo de seguimiento para un sistema mecánico tal como el de (12.1.2). Primeramente, el diseñador puede seleccionar entre control inteligente y vectorial. Segundo, un controlador puramente discontinuo tiene que ser comparado con un controlador continuo con retroalimentación con un término de discontinuidad adicional para alcanzar robustez al generar los modos deslizantes. Para otros puntos de vista, observe las tablas 12.6 y 12.7 en la sección 12.2.4.

### Ejemplo 12.2 Trayectoria circular para un manipulador de dos uniones planar.

Para los ejemplos de diseño del control en esta sección, se tomará al manipulador planar de dos uniones del ejemplo 12.1 y requiere de seguir una trayectoria circular en el espacio de trabajo. El círculo con centro  $(x_d, y_d)$  y radio  $r_d$  está dado en coordenadas mundiales  $(x_w, y_w)$  mediante:

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_{d0} + r_d \cos \mathbf{y}_d \\ y_d(t) &= y_{d0} + r_d \sin \mathbf{y}_d \end{aligned} \quad (12.2.2)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \frac{2p}{t_f} t - \sin \left( \frac{2p}{t_f} t \right) \quad (0 \leq t \leq t_f)$$

donde la operación se supone que inicia en el tiempo  $t=0$  y completarse al final del tiempo  $t = t_f$ .

Los parámetros para los ejemplos están enlistados en la tabla 12.3. Los límites sobre el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq t_f$  puede ser obtenidos mediante la cinemática inversa (12.1.13) como se resume en la tabla 12.4. La trayectoria deseada se observa en la figura 12.3.

**Tabla 12.3** Parámetros de la trayectoria circular deseada

$$x_d = 1m \quad y_d = 1m$$

$$r_d = 0.5m \quad t_f = 5s$$

**Tabla 12.4** Límites de la trayectoria circular deseada

$$|\dot{y}_d| \leq \frac{2p}{5} \quad |\dot{y}_d| \leq \frac{4p}{5} \quad |\dot{y}_d| \leq \frac{4p^2}{25}$$

$$|q_{d1}| \leq 1rad \cdot s^{-1} \quad |q_{d2}| \leq 1rad \cdot s^{-1}$$

### 12.2.1 Control con componentes inteligentes

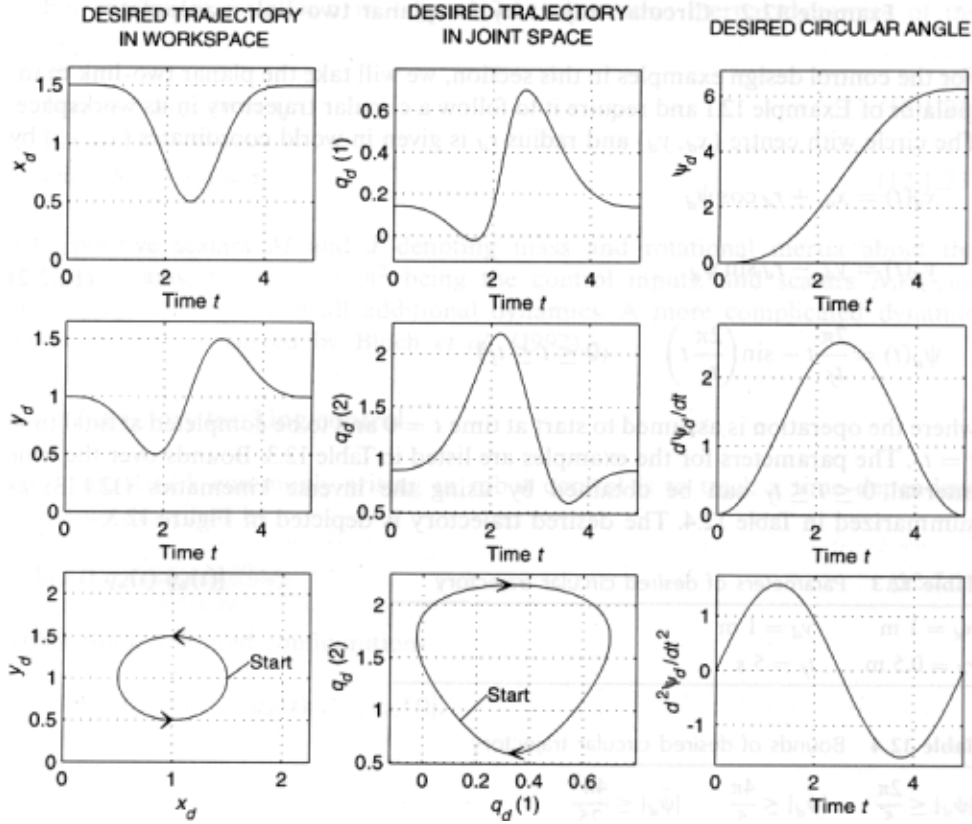
La primer selección se está principalmente interesado con la estructura de la región de deslizamiento. Debido a que el sistema (12.1.2), se suponen  $n$  entradas fuerza/torque para controlar  $n$  salidas configuradas de las dinámicas de las  $2n$ -dinámicas dimensionales, cada componente  $i$  de las  $n$  componentes del vector de salida puede ser asignando su propia región de deslizamiento y por lo tanto, puede ser controlado en forma independiente. Alternativamente, las  $n$  componentes son distribuidas como un vector (sección 12.2.2). Para las componentes inteligentes de control, la estructura de las  $n$  regiones de deslizamiento son:

$$s_i = c_i q_{e_i} + \dot{q}_{e_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (12.2.3)$$

donde  $c_i > 0$  son ganancias escalares para determinar la razón de convergencia exponencial en el error de seguimiento  $q_{e_i} = q_{d_i} - q_i$  que tiende a cero después de alcanzar la región de deslizamiento  $s_i = 0$ . Cada componente del vector de entrada de control

$$t_i = t_{0i} \text{sign}(s_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (12.2.4)$$

El modo deslizante se establece en modo independiente en cada región  $s_i = 0$  y finalmente en la intersección  $s = [s_1, \dots, s_n]^T = 0_{n \times 1}$ . La ganancia del controlador  $t_{0i}$  son a ser determinadas desde el análisis de estabilidad demostrado en el teorema 12.1.



**FIGURA 12.3** Ejemplos de control para las trayectorias circulares deseadas. Columna de la izquierda: Trayectoria en el espacio de trabajo en coordenadas mundiales  $(x_w, y_w)$ . Columna central: asociando la trayectoria en las coordenadas  $(q_1, q_2)$ . Columna de la derecha: trayectoria en el tiempo de ángulo  $\mathbf{y}_d$ .

### Teorema 12.1

Los estados del sistema (12.2.5) con los componentes (12.2.6) bajo el control (12.2.8) alcanzará la región de deslizamiento (12.2.7) en un tiempo finito:

El sistema total 
$$\mathbf{q} = M^{-1}(\mathbf{t} - N(\mathbf{q}, \mathbf{q})) \quad (12.2.5)$$

Componente del sistema 
$$\ddot{q}_i = (M^{-1}(\mathbf{t} - N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})))_i = \frac{1}{m_{ii}} \left( t_i - n_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{ij} \ddot{q}_j \right) \quad (12.2.6)$$

$$\text{Regiones} \quad s_i = c_i q_{ei} + \dot{q}_{ei} = c_i (q_{di} - q_i) + (\dot{q}_{di} - \dot{q}_i) \quad (12.2.7)$$

$$\text{Controles} \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{t}_{0i} \text{sign}(s_i) \quad (12.2.8)$$

### Prueba

Considere una función de Lyapunov candidata para cada componente,

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^2 \quad (12.2.9)$$

con su derivada con respecto al tiempo a través de la trayectoria de los sistemas

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= s_i \left( c_i \dot{q}_{ei} + \ddot{q}_{di} - \frac{1}{m_{ii}} \left( \mathbf{t}_{0i} \text{sign}(s_i) - n_i - \sum m_{ij} \ddot{q}_j \right) \right) \\ \dot{V}_i &\leq -\frac{\mathbf{t}_{0i}}{m_{ii}^+} |s_i| + |s_i| \left( c_i |\dot{q}_{ei}| + |\ddot{q}_{di}| - \frac{1}{m_{ii}^-} \left( n_i^+ + \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{ij} |\ddot{q}_j| \right) \right) \end{aligned} \quad (12.2.10)$$

Sin las limitaciones de la trayectoria deseada en (12.2.1), de los elementos  $m_{ij}$  de la matriz de masa (12.1.4) y de los elementos  $n_i$  del vector  $N(q)$  por (12.1.9) hasta (12.1.11), asegurando la existencia de

$$\mathbf{t}_{0i} > m_{ij}^+ \left( c_i |\dot{q}_{ei}| + |\ddot{q}_{di}| + \frac{1}{m_{ii}^-} \left( n_i^+ + \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{ij}^+ |\ddot{q}_j| \right) \right) \quad (12.2.11)$$

para encontrar

$$\dot{V} \leq -\mathbf{x}_i |s_i| \quad (12.2.12)$$

Suponer a los términos  $(m_{ji} / m_{ii}) \ddot{q}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq i$ , sin límites implica acoplar fuerzas/torque limitadas, debido a las aceleraciones limitadas de las otras masas. En sistemas mecánicos prácticos con una masa  $m_i$  siendo asociada con cada entrada de control  $\mathbf{t}_i$ , es inherente un acotamiento jerárquico en los términos. En particular, los brazos de robots tienden a ser construidos con uniones más robustas y uniones más cerca de la base y con uniones más ligeras en los puntos cercanos a la punta. Para un análisis de estabilidad explícita, la jerarquía de las masas tiene que resolverse en forma inversa, un proceso que puede resultar tedioso para sistemas multidimensionales. Los detalles sobre los métodos de diseño jerárquico se pueden encontrar en Utkin (1992).

Como una alternativa al diseño individual de componentes  $\mathbf{t}_i$  del vector de control  $\mathbf{t}$  obtenido en el Teorema 12.1, el diseño puede estar basado en una función de Lyapunov construido para todo el sistema en lugar de para cada subsistema. La ventaja principal de tal representación cerrada en forma vectorial es el hecho de abordar los requerimientos en las jerarquías de masas debido a la definición de la matriz de masas  $M$  en forma positiva. Se ha demostrado en el capítulo 2 que utilizando una función de Lyapunov  $V = s^T \text{sign}(s)$  para derivar el vector de control  $\mathbf{t}$  también sirve para asegurar los modos deslizantes en la región  $s=0$ .

**Ejemplo 12.3 Control por componentes de un manipulador de dos enlaces.**

Resolviendo la expresión (12.2.6) para el manipulador plano de dos enlaces con las dinámicas (12.1.14) se encuentra:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= \frac{1}{m_{11}}(t_1 - n_1 - m_{21}\ddot{q}_2) \\ \ddot{q}_2 &= \frac{1}{m_{22}}(t_2 - n_2 - m_{12}\ddot{q}_1)\end{aligned}\quad (12.2.13)$$

De acuerdo con (12.2.7), la región de deslizamiento está definida como:

$$s_1 = c_1 q_{e1} + \dot{q}_{e1} = 0 \quad q_{e1} = q_{d1} - q_1 \quad (12.2.14)$$

$$s_2 = c_2 q_{e2} + \dot{q}_{e2} = 0 \quad q_{e2} = q_{d2} - q_2$$

que conduce a obtener al vector de control:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{01} \text{sign}(s_1) \\ t_{02} \text{sign}(s_2) \end{bmatrix} \quad (12.2.15)$$

Para proveer estabilidad, se utiliza una función de Lyapunov candidata para cada componente. Como en el ejemplo, considere el control para la primer unión:

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (12.2.16)$$

La derivada con respecto al tiempo de la dinámica del sistema(12.2.13) hasta (12.2.14) bajo el control (12.2.15) está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s_1 \dot{s}_1 \\ \dot{V} &= s_1 (c_1 \dot{q}_{e1} + \ddot{q}_{d1} - \ddot{q}_1) \\ \dot{V} &= s_1 \left( -\frac{t_{01} \text{sign}(s_1)}{m_{11}} + c_1 \dot{q}_{e1} + \ddot{q}_{d1} + \frac{n_1}{m_{11}} + \frac{m_{21}}{m_{11}} \ddot{q}_2 \right)\end{aligned}\quad (12.2.17)$$

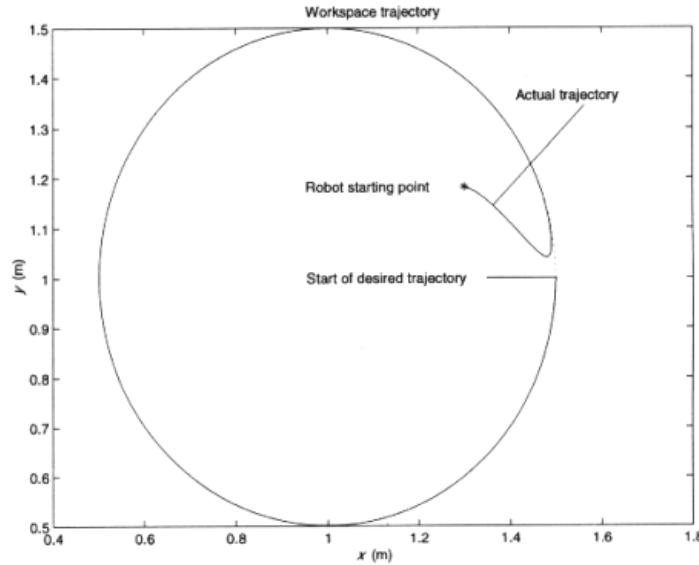
El requerimiento de  $\dot{V} < -\mathbf{x}_1 |s_1|$  lleva a la condición para los requerimientos de recursos de control  $t_{01}$  como:

$$t_{01} \geq m_{11}^+ \left( c_1 \dot{q}_{e1} + \ddot{q}_{d1} + \frac{n_1}{m_{11}} + \frac{m_{21}}{m_{11}} |\ddot{q}_2| \right) + \mathbf{x}_1 \quad (\mathbf{x}_1 > 0) \quad (12.2.18)$$

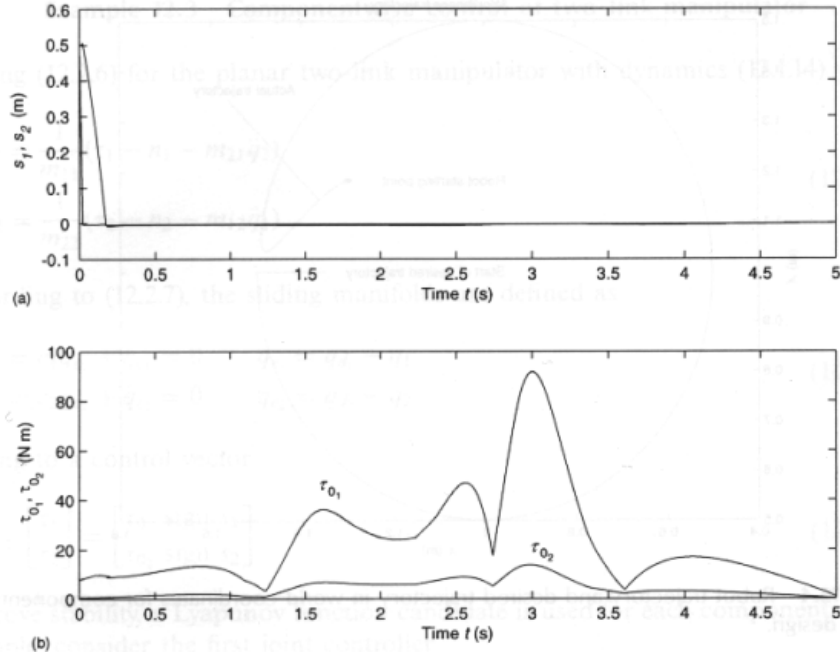
Los límites en los parámetros pueden ser encontrados en las tablas 12.2 y 12.4 . La segunda unión en el controlador puede ser tratada de una forma similar. A menudo las aceleraciones de unión  $\ddot{q}_i$  no están disponibles. En este caso, las aceleraciones de unión deseadas  $\ddot{q}_{di}$  pueden ser sustituidas bajo la suposición del seguimiento cerrado.

Para Robots con estradas de control On-Off, i.e. Los tórques de control tan solo pueden tener dos valores  $\mathbf{t}_i = -\mathbf{t}_{0i}$  o  $\mathbf{t}_i = +\mathbf{t}_{0i}$ , el valor máximo valor de (12.2.18) deberá aplicarse sobre toda la trayectoria deseada en el intervalo de  $0 \leq t \leq t_f$ . Si los recursos de control requeridos y calculados en (12.2.18) exceden los actuales recursos de control para un Robot específico, la trayectoria deseada deberá modificarse para reducir los requerimientos de aceleración en la unión. También, debido a que el punto de inicio del robot manipulador coincide con el punto de inicio de la trayectoria deseada, los errores iniciales y los modos deslizantes pueden acontecer inmediatamente en el inicio. Por lo tanto, todos los errores y sus derivadas son cero a través de toda la operación.

Las figuras 12.4 y 12.5 muestra la trayectoria con respecto al tiempo en el espacio de trabajo del Robot, las distancias a la región de deslizamiento y los requerimientos del esfuerzo de control para la trayectoria circular (12.2.2). Las condiciones iniciales fueron seleccionadas cero para fines didácticos. La convergencia a la región de deslizamiento en un tiempo finito se ilustra en la figura 12.5(a). Observe la diferencia en los requerimientos de control para las dos uniones en la figura 12.5(b).



**Figura 12.4** Trayectoria del Robot y trayectoria deseada en el mundo de coordenadas para el diseño de control por componentes.



**Figura 12.5** (a) Distancia a la región de deslizamiento  $tS_1$  y  $tS_2$ . (b) Requerimientos de los recursos de control  $t_{01}$  y  $t_{02}$  para cada unión.

### 12.2.2 Vector de Control

El control por componentes (Componentwise en inglés) es más eficiente para sistemas con términos dominantes en la diagonal de la matriz de masa  $M(q)$  y para entradas de control discontinuas, i.e. la entrada  $t_i$  el cual puede tan solo tomar dos valores  $t_i = -t_{0i}$  o  $t_i = +t_{0i}$ . Para otros sistemas, en particular para aquellas con entradas de control  $-t_{0i} \leq t_i \leq +t_{0i}$ , el control vectorial es una alternativa elegante.

En contraste a la serie de  $n$  regiones de deslizamiento unidimensionales  $s_i = 0$  para el diseño de control por componentes, el vector de control está basado en un vector  $n$ -dimensional en la región de deslizamiento:

$$s = Cq_e + \dot{q}_e \quad (s \in \mathcal{R}^{n \times 1}) \quad (12.2.19)$$

donde  $C \in \mathcal{R}^{n \times n}$  es una matriz Hurwitz y preferiblemente una matriz de ganancia diagonal,  $q_e(t) = q_d(t) - q(t)$  es el vector de error de seguimiento, y el vector de entrada  $t$  está definido como:

$$t = t_0 \frac{s}{\|s\|_2} \quad (t \in \mathcal{R}^{n \times 1}) \quad (12.2.20)$$



los modos deslizantes aparecen solo cuando todos los componentes de  $s$  en (12.2.19) son iguales a cero en lugar de aparecer en cada componente por separado como para el control por componentes. Así mismo,  $s = O_{n \times l}$  es la única discontinuidad en el control (12.2.20), donde (12.2.4) caracteriza a  $n$  discontinuidades en el vector  $\mathbf{t} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n] \in \mathcal{R}^{n \times l}$  en (12.2.4). Note que el vector de control siempre tiene longitud  $\mathbf{t}_0$ , el cual es denominado *unidad de control* para este acercamiento (Ryan & Corless, 1984; Dorling & Zinober, 1986). El análisis de estabilidad en el siguiente Teorema también esta basado en vectores.

### Teorema 12.2

El sistema en (12.2.21) con límites (12.1.5), (12.1.9), (12.1.10) y (12.1.11) bajo el control (12.23) alcanzará la región de deslizamiento (12.2.22) en un tiempo finito:

$$\text{El sistema} \quad \dot{q} = M^{-1}(\mathbf{t} - N(q, \dot{q})) \quad (12.2.21)$$

$$\text{La región} \quad s = Cq_e + \dot{q}_e = C(q_d - q) + (\dot{q}_d - \dot{q}) = 0 \quad (12.2.22)$$

$$\text{El control} \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 \frac{s}{\|s\|_2} \quad (12.2.23)$$

Considere a la función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (12.2.24)$$

con sus derivadas a través de las trayectorias del sistema (12.2.21) bajo control (12.2.23):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \left( C\dot{q}_e + \ddot{q}_d - M^{-1}(q) \left( \mathbf{t}_0 \frac{s}{\|s\|_2} - N(q, \dot{q}) \right) \right) \\ \dot{V} &\leq -\frac{\mathbf{t}_0}{M^+} \|s\| + \|s\| \left( C\|\dot{q}_e\| + \frac{N^+}{M^-} + \|\ddot{q}_d\| \right) \end{aligned} \quad (12.2.25)$$

Utilizando la suposición de acotamiento para el término en la expresión (12.2.1), (12.1.9), (12.1.10) y (12.1.11), es posible encontrar un valor para  $\mathbf{t}_0$  suficientemente grande para garantizar:

$$\dot{V} \leq -\alpha \|s\|_2 \quad (12.2.26)$$

y de aquí en lo sucesivo garantizar la convergencia en un tiempo finito en la región de  $s = O_{n \times l}$  en (12.2.22).

