**CAPITULO TRES**

# Conceptos De Diseño

La idea más importante de la metodología de diseño para el control de modo deslizante fue subrayada en la sección 1.4. De acuerdo a esta idea, cualquier procedimiento de diseño debe consistir de dos etapas. Como fue establecido en el capitulo 2, los modos deslizantes son gobernados por un sistema de orden reducido dependiendo de las ecuaciones de algunas superficies de discontinuidad. La primera etapa del diseño es la selección de las superficies discontinuas tal que el movimiento deslizante exhiba las propiedades deseadas. Los métodos de la teoría de control convencional, como estabilización, colocación de los eigenvalores y optimización dinámica, pueden ser aplicados en esta etapa. La segunda etapa es encontrar el control discontinuo para forzar el modo deslizante en la intersección de las superficies seleccionadas en la primera etapa. El segundo problema es la reducción de orden, donde la dimensión esta es igual al numero de discontinuidades de superficie, que usualmente es igual a la dimensión del control.

Dividiendo del movimiento global en dos movimientos de dimensiones menores –el primer movimiento precede al modo deslizante con un intervalo de tiempo finito y el segundo movimiento es el modo deslizante con las propiedades deseadas – puede simplificar el procedimiento de diseño considerablemente. Además, los modos deslizantes pueden ser insensibles con respecto a parámetros de planta desconocidos y perturbaciones, aunque la propiedad de invarianza puede tomar lugar para cualquier sistema, como fue demostrado para el sistema (2.1.1) en las secciones 2.1 y 2.2. En este capitulo, diferentes métodos de diseño de control de modo deslizante basados en el principio de desacoplamiento pueden ser desarrollados y especi al atención será puesta a la clase de sistemas con movimientos deslizantes invariantes.

## 3.1 Ejemplo Introductorio

Como un ejemplo del diseño del control de modo deslizante, un manipulador multienlace puede ser considerado bajo la suposición de que cada enlace esta sujeto a la fuerza del control o torque. El movimiento del sistema es representado por un grupo de ecuaciones de segundo orden interconectadas

$$M(q)\,\ddot{q} + f(\dot{q}, q, t) = u$$

Donde q y u son vectores de la misma dimensión de estados generalizados y fuerza o torque componentes del control respectivamente, $M(q)$ es un definido positivo matriz de inercia, y $f(\dot{q}, \dot{q}, t)$ es una función dependiente de la geometría del sistema, el vector de velocidad, parámetros desconocidos y perturbaciones.

La ecuación de movimiento puede ser representada como

$$\dot{p} = v \qquad M(p)\,\dot{v} = -f(p, v, t) + u$$

con $q = p$, $\dot{q} = v$.

Si el modo deslizante es forzado en la variable $s = cp + v = 0$ entonces

$$\dot{p} = -cp$$

(Formalmente, el control equivalente $u_{eq}$ debe ser encontrado de la ecuación $\dot{s} = 0$, sustituido en la segunda ecuación y luego v debe ser remplazado por $-cp$; resultara en la ecuación anterior con respecto a $p$). Asignando los valores de *y* de la ecuación de modo deslizante por elección propia de la matriz $c$, la proporción deseada de convergencia de $p=q$ y $v=\dot{q}$ ( notese que $s=cp+v=0$) para que cero pueda ser determinado. Para forzar el modo deslizante con las dinámicas deseadas, convergencia de la proyección de movimiento en el subespacio $s$

$$\dot{s} = c\dot{p} + \dot{v} = cv - M^{-1}f + M^{-1}u$$

debe proporcionarse. La matriz de inercia y su inversa $M^{-1}$ son definidos positivos. Esto sigue del Teorema 2.1 de la sección 2.4 que el control discontinuo

$$u = -U(q, \dot{q})\,\mathrm{sign}(s) \qquad U(q, \dot{q}) > 0$$

con valor suficientemente alto de función escalar $U(q, \dot{q})$ forza el movimiento deslizante en la variable $s=0$. Solo un limite superior de función $f(q, \dot{q}, t)$ y una estimación menor para el valor mínimo de *y* de $M^{-1}$ de (ver comentarios 2.2 y 2.3) son necesarios para el diseño del control estabilizando el sistema mecánico operando bajo la condición de incertidumbre con la proporción de convergencia desada. Recordemos la solución obtenida en la armazón de un modelo ideal con vector de estado conocido $(p^T, v^T)$ y asumiendo que las fuerzas del control pueden ser implementadas como funciones de estado discontinuas.

## 3.2 Desacoplamiento

A continuación, trataremos con sistemas afine

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \qquad x, f \in \mathbb{R}^n,\ B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m},\ u(x) \in \mathbb{R}^m \tag{3.21}$$

$$u(x) = \begin{cases} u^{+}(x, t) \text{ si } s(x) > 0 \\ u^{-}(x, t) \text{ si } s(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{(doble componente)} \qquad s(x)^T = [s_1(x) \ldots s_m(x)]$$

con el lado diestro de (3.2.1) empieza la función lineal del control.

Para obtener la ecuación del modo deslizante en la variable $s(x)=0$ bajo la suposición que la matriz $GB$ (matriz $G=\{\partial s/\partial x\}$ con filas como pendientes de los componentes del vector $s$) no es singular, el control equivalente

$$u_{eq}(x, t) = -(G(x)B(x, t))^{-1}G(x)f(x, t)$$

Debe ser sustituido en (3.2.1) por el control $u(x)$ para producir

$$\dot{x} = f_{sm}(x, t)$$

$$f_{sm}(x, t) = f(x, t) - B(x, t)(G(x)B(x, t))^{-1}G(x)f(x, t) \qquad (3.2.2)$$

Desde $s(x)=0$ en el modo deslizante, este sistema de $m$ ecuaciones algebraicas puede ser resuelto con respecto a $m$ componentes del vector de estado constituyendo el subvector $x_2$:

$$x_2 = s_0(x_1),\ x_2 \in \mathbb{R}^{m},\ \ x_1 \in \mathbb{R}^{n-m} \quad x^T=[x_1^T \quad x_2^T] \ \text{ y } s(x)=0$$

Remplazando $x_2$ por $s_0(x_1)$ las primeras $n$-$m$ ecuaciones de (3.2.2) producen una ecuación de modo deslizante de orden reducido

$$\dot{x}_1 = f_{1sm}(x_1,\ s_0(x_1),\ t)$$

donde $f^T_{sm}(x,\ t) = f^T_{sm}(x_1, x_2,\ t) = [f^T_{1sm}(x_1,\ x_2,\ t)\ \ f^T_{2sm}(x_1,\ x_2,\ t)]$

La ecuación de movimiento (3.2.3) depende de la función $s_0(x_1)$, i.e. en la ecuación de la variable de discontinuidad. La función $s_0(x_1)$ puede ser tomada como un control $m$-dimensional para sistemas de orden reducido. Note que el problema de diseño no es convencional, desde los lados diestros en (3.2.2) y (3.2.3) depende no solo de la ecuación de la variable de discontinuidad pero en la pendiente de la matriz $G$ como correcto. Si una clase de funciones $s(x)$ es preseleccionada, e.g. funciones lineales o funciones en forma de series finitas, entonces ambos $s(x)$, $G$ y por consiguiente los lados diestros en (3.2.3) dependen del juego de parámetros seleccionados cuando diseñamos las dinámicas deseadas del movimiento deslizante.

El sistema de segundo orden (2.1.1) con control escalar

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u + d_1f(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u + d_2f(t)$$

$$u = -M\ \mathrm{sign}(s) \qquad s = c_1x_1 + c_2x_2$$

puede servir como un ejemplo. Como se muestra en la sección 2.2, el modo deslizante a lo largo de la línea interruptora $s= c_1x_1 + c_2x_2$ es gobernado por la ecuación de primer orden

$$\dot{x}_1 = (a_{11} - a_{12}c_2^{-1}c_1 - (cb)^{-1}b_1(ca^1 - ca^2c_2^{-1}c_1))x_1 + (d_1 - b_1(cb)^{-1}(cd))f(t)$$

donde $c=[c_1 \quad c_2]$, $b^T=[b_1 \quad b_2]$, $(a^1) = [a_{11} \quad a_{21}]^T$, $[a^2] = [a_{12} \quad a_{22}]^T$, $d^T=[d_1 \quad d_2]$ y $cb$ y $c_2$ son supuestos para ser diferentes de cero. La ecuación puede ser escrita en la forma

$$\dot{x}_1 = (a_{11} - a_{12}c_1^* - (c^*b)^{-1}b_1(c^*a^1 - c^*a^2c_1^*))x_1 + (d_1 - b_1(c^*b)^{-1}(c^*d))f(t)$$

Con $c^*=[c_1^* \quad 1]$, y $c_1^*=c_2^{-1}c_1$. de un solo parámetro $c_1^*$ debe ser seleccionado para proveer el movimiento deseado de las dinámicas de primer orden en nuestro ejemplo de segundo orden.

La segunda etapa del procedimiento de diseño es la selección del control discontinuo forzando el modo deslizante en la variable $s(x)=0$ que fue escogido en la primera etapa. Las condiciones para que el modo deslizante exista son equivalentes a la condición de estabilidad de la proyección de movimiento en el subespacio s:

$$\dot{s} = Gf + GBu \tag{3.2.4}$$

con una convergencia de tiempo finita (sección 2.4).

generalmente hablando, la matriz $-(GB + (GB)^T)$ no es definida positiva, por tanto la estabilidad no puede ser provista por incremento de los elemento de la matriz $U$, como se recomendo en comentario 2.3 de la sección 2.4 para el control (3.2.1).

Permitimos la función definida positiva

$$V = 0.5s^T s > 0$$

Ser un candidato de la función de Lyapunov. Su derivada de tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema de la forma

$$\dot{V} = s^T Gf + s^T GBu \tag{3.2.5}$$

Asumimos que la matriz $GB$ no es singular, seleccionar el control como una función discontinua

$$u = -U(x)\,\mathrm{sign}(s^*) \quad \text{con} \quad s^* = (GB)^T s \tag{3.2.6}$$

donde U(x) es una función escalar positiva del estado. Entonces (3.2.5) es de forma

$$\dot{V} = s^T Gf - U|s^*|$$

donde $|s^*| = (s^*)^T \mathrm{sign}(s^*)$, o

$$\dot{V} = (s^*)^T (GB)^{-1} Gf - U|s^*| \tag{3.2.7}$$

Desde $|s^*|$ ³ $||s^*||$ debido a

$$\sum_{i=1}^{m} \left| s_i^* \right| \geq \left( \sum_{i=1}^{m} (s_i^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

esto sigue de (3.2.7) que

$$\dot{V} \text{ £ } |s^*|\,|(GB)^{1} Gf| - U|s^*| \tag{3.2.8}$$

Si una estimación superior $F$ ³ $|(GB)^{-1}Gf|$ es conocido, entonces $\dot{V} < 0$ para $U > F$, el movimiento es asintoticamente estable y el modo deslizante es forzado en el sistema. Después se demostrara que el intervalo de tiempo precediendo al modo deslizante es finito y puedes ser disminuido incrementando la magnitud U(x) del control discontinuo. El modo deslizante ocurre en la variable s*=0. La transformación (3.2.6) no es singular, por consiguiente las variables s=0 y s*=0 coinciden y el modo deslizante toma lugar en la variable s=0, que fue seleccionada par el diseño del movimiento deslizante con las propiedades deseadas.

El proceso de diseño ha sido descompuesto en dos subproblemas independientes de dimensiones menores m y n-m. La descomposición es factible por que las ecuaciones de modo deslizante no dependen del control pero dependen de la ecuación de la variable deslizante. Cuando se diseña una variable interruptora, una restricción debe ser tomada en cuenta: la matriz GB no debe ser singular. El conocimiento exacto de los parámetros de la planta y las perturbaciones (vector f y matriz B) no es necesario, es suficiente el conocimiento de un limite superior F para forzar el modo deslizante en la variable s*=0. La matriz B(x, t) es necesaria para calcular el vector s* en (3.2.6). Sin embargo, el rango de variación del parámetro en la matriz B(x, t) puede ser encontrado tal que el modo deslizante pueda ser forzado sin el conocimiento exacto de estos parámetros.

Primero, mostraremos que cualquier $m \; x \; m$ transformación en matriz $Q$ en

$$S^* = Q(x)s$$

Encaja si $(Q^{-1})^T GB = L(x)$ es una matriz con diagonal dominante

$$\left|I_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left|I_{ij}\right| \quad o \quad a_i = \left|I_{ii}\right| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left|I_{ij}\right| \quad a_i > 0 \quad (para \quad cualquier \quad i = 1, \ldots, m)$$

De hecho para el control $u= -U(x)(sign(L))(sing(s^*))$ con sign$(L)$ siendo una matriz diagonal con elementos sign$(l_{ii})$

$$\dot{V} = (s^*)^T (Q^{-1})^T Gf - U(x)(s^*)^T L(sign(L))(sign(s^*))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} s_i^* q_i - U \sum_{j=1}^{m} \left( \left|s_i^*\right| \left|I_{ij}\right| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} I_{ij} sign(I_{ij} s_i^* s_j^*) \right)$$

Donde $q_i$ son elementos del vector $(Q^{-1})^T \; Gf$. La derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov es negativa, i.e. el modo deslizante es forzado en $s^*=0$ si

$$U(x) > \max_i |q_i(x, t)| / a_i$$

Para ilustrar el metodo de diseño para el sistema (3.2.1), asumimos que la matriz $B$ consiste de una parte nominal conocida y la variación desconocida $B=B_0 + DB$. Entonces para $Q=(GB_0)^T$ la matriz $L$ es de forma $L=I_m+DL$, $DL=(GB_0)^{-1}GDB$ ($I_m$ es la $m \; xm$ matriz idéntica). Esta forma nos permite encontrar un rango admisible de variaciones en matriz $B$: la suma de los valores absolutos en cualquier línea de la matriz $DL$ no debe exceder 1. Del modo deslizante puede ser forzado con control (3.2.6) en sistemas con parámetros desconocidos en la entrada de la matriz $B(x, t)$.

## 3.3 Forma Regular

Las dos etapas del proceso de diseño - selección de una variable interruptora y luego encontrar el control que forcé el modo deslizante en esta variable – se ponen mas simples para sistemas en la llamada forma regular. La forma regular para sistemas affine (3.2.1) consiste de dos bloques

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \tag{3.3.1}$$

donde $x_1$ Î Â$^{n-m}$, $x_2$ Î Â$^{m}$ y $B_2$ es una $m \; x \; m$ matriz no singular, i.e. det $B_2$¹ 0.

El primer bloque no depende del control, y la dimensión del segundo bloque coincide con la dimensión del control. El diseño es realizado en dos etapas también. Primero, el $m$-dimensional vector de estado $x_2$ es manejado como el control del primer bloque y diseñado como una función del estado $x_1$ del primer bloque en correspondencia con algún criterio de desempeño

$$x_2 = -s_0(x_1) \tag{3.3.2}$$

Otra vez tratamos con un problema de diseño de orden reducido. En la segunda etapa, el control discontinuo es para ser seleccionado para forzar el modo deslizante en la variable

$$s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0 \qquad (3.3.3)$$

Después el modo deslizante ocurre en la variable deslizante (3.3.2), la condición (3.3.3) es sostenida y el movimiento adicional en el sistema es gobernado por la ecuación diferencial

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, -s_0(x_1), t) \qquad (3.3.4)$$

Con las propiedades dinámicas deseadas.

El diseño del control discontinuo puede ser desarrollado usando los métodos de las sección 3.1 con $x^T=[x^T_1 \quad x^T_2]$, $f^T=[f^T_1 \quad f^T_2]$, $B^T=[0_{mx(n-m)} \quad B^T_2]$, $G=[G_1 \quad I_m]$; $G_1=\{\partial s_0/\partial x_1\}$ es una $m \times (n-m)$ matriz.

Nótense las siguientes características para el diseño en forma regular:

1. En contraste a (3.2.2) y (3.2.3), la ecuación de modo deslizante no depende de la matriz pendiente $G$, que produce el problema de diseño en la primera etapa un diseño convencional de control $m$-dimensional $x_2$ en un sistema $(n-m)$-dimensional con vector de estado $x_1$.
2. El calculo del control equivalente para encontrar la ecuación de modo deslizante no es necesario.
3. La condición $\det(GB) = \det(b_2) \neq 0$ es sostenida. ( Recuerde que esta condición es necesaria para forzar el modo deslizante en la variable preseleccionada $s(x)=0$.)
4. El modo deslizante es invariante con respecto a las funciones $f_2$ y $B_2$ en el segundo bloque.

Estas características sugieren que debemos encontrar un transformación coordinada reduciendo el sistema affine original (3.2.1) a la forma regular (3.3.1) antes de diseñar el control de modo deslizante. Nos confinaremos a los con controles escalares. Los métodos relacionados a sistemas con control vector pueden ser encontrados en Luk'yanov y Utkin (1981).

Asumimos que en un sistema

$$\dot{x} = f(x, t) + b(x, t)u$$
$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, f^T = [f_1 ...., f_n] \qquad (3.3.5)$$

$b(x, t)$ es un vector $n$-dimensional con componentes $b_i(x, t)$, $i=1...., n$. Asumimos que el mas pequeño de ellos, deja ser $b_n(x, t)$, es diferente de cero para cualquier $x$ y $t$:

$$b_n(x, t) \neq 0$$

Permitimos una solución para un sistema auxiliar de orden ($n$-$1$)

$$dx_i/dx_n = b_i/b_n \qquad i= 1....n-1 \qquad (3.3.6)$$

es un juego de funciones

$$x_i = \varphi_i(x_n, t) \qquad (i = 1….n-1) \qquad (3.3.7)$$

Nos permitimos introducir la transformación coordinada no singular

$y_i = x_i - j_i(x_n, t) \qquad (i = 1\ldots n\text{-}1)$ (3.3.8)

De acuerdo a las ecuaciones (3.3.5) a (3.3.8), las ecuaciones de movimiento con respecto al Nuevo vector de estado $(y_1,\ldots, y_{n-1}, x_n)$ son de la forma

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i - \frac{dj_i(x_n,t)}{dx_n}$$

$$= \dot{x}_i - \frac{dx_i}{dx_n}\dot{x}_n = f_i + b_i u - \frac{b_i}{b_n}(f_n + b_n u)$$

$$= f_i - \frac{b_i}{b_n} f_n \qquad (i = 1,\ldots, n-1)$$

$$\dot{x}_n = f_n + b_n u.$$

Remplazando $x_i$ por $y_i + j_i(x_n)$ lleva a las ecuaciones de movimiento

$$\dot{y} = f^*(y, x_n, t)$$

$$\dot{x} = f_n^*(y, x_n) + b_n^*(y, x_n, t)u \tag{3.3.9}$$

donde $y$ y $f^*$ son vectores $n$-dimensiónales, y $f_n^*$ y $b^*_n$ son funciones escalares.

El sistema con respecto a $y$ y $x_n$ es en la forma rectangular (3.3.1) con un orden $(n\text{-}1)$ y un bloque de primer orden. Para un caso particular con $b_i$ dependiendo solo de una coordenada $x_n$, la transformación de estado puede ser encontrada en la forma explicita

$$y_i = x_i - \int_0^{x_n} \frac{b_i(g,t)}{b_n(g,t)}\,dg \tag{3.3.10}$$

El sistema con respecto a las nuevas variables es en la forma rectangular (3.3.9) también.

## 3.4 invariancia

Considere un control con parámetros de tiempo variantes que operan en la presencia de perturbaciones. Las entradas de referencia dadas pueden tratarse como perturbaciones si las desviaciones de las variables del control de las entradas son incluidas en el vector de estado. La posibilidad de sistemas diseñados con movimientos deslizantes invariantes en espacios canónicos ha sido discutida en la introducción al capitulo 1.

Permitimos a la variable $x_i$ y sus derivadas de tiempo $x_1^{i-1} = x_i$, $i=2,\ldots,n$ ser componentes de un vector de estado en espacio canónico, entonces las ecuaciones de movimiento de un sistema de una-entrada una-salida en espacio canónico son de la forma

$$\dot{x}_i = x_i + 1 \qquad (i=1,\ldots,n\text{-}1)$$

$$\dot{x}_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i + f(t) + b(t)u \tag{3.4.1}$$

donde $a_i(t)$ y $b(t)$ son parametros limite con rango conocido $|a_i(t)|$ £ $a_{i0}$, $|b(t)|$ ³ $b_0$; $f(t)$ es una perturbación limite $|f(t)|$ £ $f_0$ con $a_{i0}, b_0, f_0$ siendo escalares conocidos.

Dejamos al control ser una función de estado discontinuo

$$u = -(a|x| + M)sign(s) \qquad |x| = -\sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad |x| = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Donde $a$, $M$, $c_i$ son valores constantes y $c_n = 1$. se calcula la derivada de tiempo de la función $s$ como

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{n} (c_{i-1} - a_i)x_i - b(a|x| + Msign(s)) \qquad con \quad c_0 = 0$$

La condición para que el estado alcance el plano $s=0$ en el espacio del estado y para que el modo deslizante exista, ver (2.4.1), es cumplida si

$$b_0 a > max(c_i\text{-}1 - a_{i0}) \quad i = 1,\ldots,n, \quad y \quad b_0 M > f_0$$

Después de un intervalo de tiempo finito, el modo deslizante ocurre en el plano $s=0$. para obtener la ecuación de modo deslizante, $x_n = -S_{i=1}^{n-1} c_i x_i$ debe ser sustituido en la ecuación ($n$-1) del sistema (3.4.1) y la ultima debe ser despreciada:

$$\dot{x}_i = x_i + 1 \qquad (i=1,...n\text{-}2)$$

$$\dot{x}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$$

La ecuación de modo deslizante es invariante para las variaciones de los parámetros de la planta y la perturbación, y sus dinámicas son determinadas por las raíces de la ecuación característica

$$p^{n\text{-}1} + c_{n\text{-}1}p^{n\text{-}2} + \ldots + c_2 p + c_1 = 0$$

Que puede ser formada por una opción apropiada de coeficientes ci en las ecuaciones de la superficie de discontinuidad. Sin embargo, las dificultades técnicas involucradas en la obtención de las derivadas de tiempo de la salida de la planta xi son el mayor obstáculo para la implementación de tales modos deslizantes específicos. Al mismo tiempo, por medios escalares y control vector, modos deslizantes invariantes pueden ser forzados en los espacios cuyas coordenadas no sólo puedan ser derivadas, pero las variables físicas arbitrarias también.

Nos permitimos formular las condiciones de invarianza par sistemas afines arbitrarios de la forma (3.2.1)

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t) \tag{3.4.2}$$

donde el vector $h(x, t)$ caracteriza perturbaciones y variaciones de parámetros que no deben afectar las dinámicas del sistema de realimentación. Conforme al método de control equivalente (sección 2.3) la solución a $\dot{s} = G(f + Bu + h) = 0$ con respecto al control,

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}G(f + h)$$

debe ser sustituido en la ecuación del sistema (3.4.2) para producir

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1}Gf + (I_n - B(GB)^{-1}G)h \tag{3.4.3}$$

permitimos que el rango $(B(x, t))$ sea un subespacio formado por los vectores base de la matriz $B(x, t)$ para cada punto $(x, t)$. El modo deslizante es invariante con respecto al vector $h(x, t)$ si

$$h(x, t) \; Î \; \text{rango}(B(x, t)) \tag{3.4.4}$$

La condicion (3.4.4) significa que existe el vector $g(x, t)$ tal que

$$h(x, t) = B(x, t)g(x, t) \tag{3.4.5}$$

Substitución directa del vector $h(x, t)$ en la forma (3.4.5) en (3.4.3) demuestra que el movimiento deslizante en cualquier variable $s(x)=0$ no depende de la perturbación del vector $h(x, t)$. Siguiendo de los métodos de diseño en la sección 3.2 y 3.3, una estimación superior de este vector es necesaria para forzar el movimiento deslizante. La condición (3.4.5) generaliza la condición de invarianza obtenida en Drazenovic (1969) para sistemas lineales.

## 3.3 Unidad de Control

El objetivo de esta se cción es demostrar un método de diseño para control discontinuo que forza el modo deslizante en alguna variable sin selección individual de cada componente del control como una función de estado discontinuo. La aproximación implica el diseño del control basado en un afuncion de Lyapunov seleccionada por u sistema (realimentación o curva-abierta) nominal. El control será encontrado tal que la derivada de tiempo de la función de Lyapunov es negativa a lo largo de las trayectorias del sistema con perturbaciones causadas por incertidumbres en el modelo de la planta y condiciones ambientales.

Las raíces del sobre acercamiento pueden ser encontrados en papeles de Leitmann y Gutman publicados en los 70´s (Gutman and Leitmann, 1976; Gutman, 1979). La idea de diseño puede ser explicada por un sistema afino

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t) \tag{3.5.1}$$

con vectores de estado y de control $x$ Î $Â^n$, $u$ Î $Â^m$, vectores de estado-dependiente $f(x,t)$, $h(x, t)$ y matriz de entrada de control $B(x, t)$ Î $Â^{nxm}$. El vector $h(x, t)$ representa las incertidumbres del sistema y su influencia en el proceso de control debe ser rechazada.

La ecuación

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{3.5.2}$$

representa un sistema nominal de curva-abierta que se asume es asintoticamente estable con un candidato a la función de Lyapunov conocido

$$V(x) > 0$$

$$W_0 = dV\Big/dt\Big|_{h=0,u=0} = grad(V)^T f < 0 \qquad grad(V)^T = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \tag{3.5.3}$$

El vector de perturbación $h(x, t)$ es asumido para satisfacer las condiciones de igualación (3.4.4), de allí existe el vector $g(x, t)$ Î $R^m$ tal que

$$h(x, t) = B(x, t)g(x, t) \tag{3.5.4}$$

$g(x, t)$ puede ser un vector desconocido con estimación escalar superior conocida $g_0(x,t)$,

$$||g(x, t)|| < g_0(x, t) \tag{3.5.5}$$

Calcular la derivada de tiempo de la función de Lyapunov $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (3.5.2) a (3.5.5) como

$$W= dV/dt = W_0 + grad(V)^T B(u + g) \tag{3.5.6}$$

Para el control u dependiendo de una estimación superior de la perturbación desconocida, escogido como

$$u = -r(x,t)\frac{B^T(grad(V)}{\left\| B^T(grad(V)\right\|} \tag{3.5.7}$$

Con una función escalar $p(x, t) > g_d(x, t)$ y

$$||B^T grad(V)||^2 = (grad(V)^T B)(B^T grad(V))$$

la derivada de tiempo de la función de Lyapunov

$$\begin{aligned} W &= W_0 - p(x, t)||B^T grad(V)|| + grad(V)^T Bg(x, t) \\ &< W_0 - ||B^T grad(V)||[p(x, t) - g_d(x, t)] \\ &< 0 \end{aligned}$$

es negativa. Esto implica que el sistema perturbado con control (3.5.7) es asinteticamente estable también.

Dos rasgos importantes deben ser subrayadas para el sistema con control (3.5.7):

1. El control (3.5.7) sufre discontinuidades en la variable $(n\text{-}m)$-dimensional $s(x)=B^T grad(V) = 0$ y es una función de estado continua mas allá de esta variable. Esta es la diferencia principal entre el control (3.5.7) y todas las entradas de control en las secciones previas con funciones interruptoras individuales para cada componente del control.
2. La perturbación $h(x, t)$ es rechazada debido al forzamiento del modo deslizante en la variable $s(x)=0$. En verdad, si la perturbación (3.5.4) es rechazada, entonces el control u debe ser igual a $-g(x, t)$, que generalmente no es el caso para el control (3.5.7) mas allá de la variable de discontinuidad $s(x)=B^T grad(V)\,{}^{1}0$. Esto significa que el modo deslizante ocurre en la variable s=0 y el valor equivalente del control ueq es igual a $-g(x, t)$.

Note que la norma de control (3.5.7) con la ganancia $p(x, t)=1$

$$\left\| \frac{B^T(grad(V)}{\left\| B^T(grad(V)\right\|} \right\|$$

Es igual a cero para cualquier valor del vector de estado. Esto explica el termino "unidad de control" para (3.5.7).

Después, la unidad de control es usada con una función de Lyapunov en la segunda etapa del proceso de diseño convencional de dos etapas para el control de modo deslizante: selección de una variable deslizante $s(x)=0$ y forzamiento del modo deslizante en esta variable (Ryan y Corless, 1984; Dorling y Zinober, 1986).

La variable $s(x)=0$ es seleccionada en complacencia con algún criterio de desempeño y el control es diseñado en la forma (3.5.7):

$$u = -r(x,t)\frac{D^T s(x)}{\left\| D^T s(x) \right\|} \qquad (3.5.8)$$

Con $D = GB$, $G = \{\partial s/\partial x\}$ y es asumido que D no es singular.

La ecuación de la proyección de movimiento del sistema (3.5.1) en el subespacio s es de la forma

$$\dot{s} = G(f + h) + Du \qquad (3.5.9)$$

Las condiciones para que las trayectorias converjan en la variable s(x)=0 y para que el modo deslizante exista en esta variable pueden ser derivadas basados en un candidato de la función de Lyapunov

$$V = 1/2 s^T s > 0 \qquad (3.5.10)$$

Encontrar la derivada de tiempo de la función de Lyapunov (3.5.10) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.5.9) con control (3.5.8):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T G(f + h) - p(x, t)\|D^T s(x)\| \\ &= [s^T D][D^{-1} G(f + h) - p(x, t)\|D^T s(x)\| \\ &\le \|D^T s(x)\|[\|D^{-1} G(f + h)\| - p(x, t)] \end{aligned}$$

Para $p(x, t) > \|D^{-1}G(f + h)\|$ el valor de $V$ es negativo, por tanto el estado alcanzara la variable $s(x)=0$. Después mostraremos que si $p(x, t) - \|D^{-1}G(f + h)\| \ge p_0 > 0$ ($p_0$ es una constante), entonces $s(x)$ desaparece y el modo deslizante ocurre después de un intervalo de tiempo finito.

Preliminarmente estimamos $\|D^T s(x)\|$ :

$$\|s\| = \|(D^T)^{-1} D^T s\| \le \|(D^T)^{-1}\|\, \|D^T s\| \text{ y } \|D^T s\| \ge \|(D^T)^{-1}\|^{-1} \|s\|.$$

De esta manera $\dot{V} \le -\|(D^T)^{-1}\|^{-1} p_0 \|s\|$ y desde $V = ½\|s\|^2$, $\|s\| = \sqrt{V}$ $V$ lleva a

$$\dot{V} < -nV^{1/2} \qquad n = \sqrt{V}\ \|(D^T)^{-1}\|^{-1} p_0$$

La solución a la desigualdad diferencial $V(t)$ no es negativa y es limitada por

$$V(t) < (-n/2\, t + \sqrt{V_0}\,)^2 \qquad V_0 = V(0)$$

Desde que la solución desaparece después de algún $t_s < (2/n)\sqrt{V_0}$, el vector $s$ desparece también y el modo deslizante comienza después de un intervalo de tiempo finito.

Recordando la diferencia principal en los movimientos precedentes al modo deslizante en $s(x)=0$ para el control de componente sabio convencional y los métodos de diseño de unidad de control. El control convencional sufre discontinuidades cualquiera de los componentes del vector s debe cambiar signo, considerando que la unidad de control es una función de estado discontinua hasta que la variable $s(x)=0$ es alcanzada.

## Referencias


DOELING, C. M. Y ZINOBER, A. S. I., 1986 Two approaches to sliding mode design in multivariable structure control systems, *International Journal of control,* 44, 65-82.

DRAZENOVIC, B.,1969, The invariance conditions for variable structure systems, *Automatica,* 5, 287-95.

GUTMAN, S., 1979, Uncertain dynamic Systems – a Lyapunov min-max approach, *IEEE Transactions on Automatic control, AC-24, 437-49.* .