

CAPITULO OCHO

El Problema del Chattering



Casi siempre que las ideas en modos deslizantes son implementadas, el ruido que provocan los controladores han irritado a los ingenieros diseñadores casi hasta el punto de suspender el uso de la técnica. El fenómeno es conocido como chattering (término del ingles que significa oscilación o parloteo). Se identifican dos causas principales. La primera, una rápida dinámica en el lazo de control la cual fue despreciada al momento de modelar al sistema, a menudo se presentan rápidas conmutaciones de los controladores de modos deslizantes. La segundo, corresponde a una implementación digital mediante microcontroladores con razones de muestreo que permiten la discretización del chattering. Este capítulo se centra en la primer causa, la falta de modelado en la dinámica del lazo de control e introduce cuatro métodos para prevenir el chattering. Los modos deslizantes en sistemas de tiempo discreto sin discretización del chattering se discute en el capítulo nueve.

8.1 Análisis del problema

El término chattering describe el fenómeno de señales oscilantes de frecuencia y amplitud finita, aparecen en las implementaciones en modos deslizantes debido a la rápida conmutación del controlador en modos deslizantes excitando las características dinámicas sin modelar del lazo de control. “Dinámica sin modelar” puede referirse a sensores y accionadores que no se toman en cuenta para el modelado del proceso debido a que estos son significativamente más rápidos que la dinámica principal del sistema. Sin embargo, debido a que la idea de los modos deslizantes en sistemas es infinitamente rápida, toda la dinámica del sistema deberá ser considerada en el diseño del controlador.

Afortunadamente, la prevención del chattering usualmente no requiere un modelo detallado de todos los componentes. Sin embargo, primeramente debe diseñarse un controlador

en modos deslizantes bajo suposiciones ideales. En un segundo paso de diseño, es posible prevenir el chattering mediante algunos de los métodos a considerar. Resolver el problema del chattering es importante cuando se busca explotar al máximo los beneficios del uso de los modos deslizantes en el control de sistemas reales. Sin un manejo adecuado del chattering en el proceso de diseño, puede llegar el mayor obstáculo en la implementación de los modos deslizantes en una amplia variedad de aplicaciones. Observe que la conmutación como la principal forma de operar de los modos deslizantes no se denomina como chattering, en el caso ideal, porque se comprende que la frecuencia tiende a infinito.; en este libro se denomina "chattering" para describir oscilaciones de frecuencia finita no deseadas causada por imperfecciones en el sistema.

Esta sección busca profundizar el análisis del problema del chattering. Estudios tanto analíticos como numéricos se utilizan para examinar como se comporta la dinámica no considerada en los lazos de control, causa principal de las oscilaciones en las trayectorias de estado.

8.1.1 Sistema ejemplo: Modelado

Como ejemplo ilustrativo, se presenta a una planta de primer orden junto con un accionador cuya dinámica no modelada es de segundo orden. La representación en variables de estado de un sistema de primer orden es:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + d(x,t) + bw(t) \quad (8.1.1)$$

donde $a^- \leq a \leq a^+$ y $0 < b^- \leq b \leq b^+$ son parámetros desconocidos con acotaciones conocidas, $w(t)$ es la variables de control y $d(t)$ se supone uniformemente acotada para todas las condiciones de operación (x,t) como $|d(x,t)| \leq d^+$. La variables de control $w(t)$ es la variables de salida de un accionador sin modelar cuya dinámica tiene la estructura:

$$w(t) = \frac{w^2}{p^2 + 2wp + w^2} u(t) = \frac{1}{(mp + 1)^2} u(t) \quad (8.1.2)$$

Donde $u(t)$ es la acción de control que alimenta a la planta (8.1.1) y p denota la variables de Laplace. En la ecuación (8.1.2) se presenta una mezcla de funciones en los dominios del tiempo y la frecuencia para facilitar la representación, sin embargo, esto no es correcto. Por ejemplo, se comprende en (8.1.2) que la variable de control en el dominio del tiempo $w(t)$ es la señal de salida del filtro pasa bajos descrito mediante la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia en p con la señal de entrada en dominio del tiempo $u(t)$.

En la ecuación (8.1.2) $w > 0$ es el ancho de banda del accionador para $w \gg a$ en la ecuación (8.1.1). La pequeña constante de tiempo $m = 1/w > 0$ se sustituye para suponer a la dinámica del accionador significativamente más rápida que la del sistema (8.1.1).

El propósito del control es lograr que las variables de estado y la señal de salida $x(t)$ del sistema (8.1.1) alcancen una trayectoria $x_d(t)$ con una amplitud acotada y conocida como $|x_d(t)| \leq x_d^+$ para una razón de cambio igual a $|\dot{x}_d(t)| \leq v_d^+$. Los parámetros para el ejemplo de simulación en esta sección son $a=0.5$, $b=1$, $d(t)=0.2\sin(10t)+0.3\cos(20t)$ $a = 0.5$, $b = 1$

$d(t) = 0.2\sin(10t) + 0.3\cos(20t) \leq |0.5|$, $w = 50$, entonces $m = 0.02$, con una restricción en la señal de control $|u(t)| \leq 2.01$ y una señal de referencia (trayectoria de estado) $x_d(t) = \sin t$, i.e. $x_d^+ = 1$ y $v_d^+ = 1$. Observe que con $a > 0$, la planta del ejemplo (8.1.1) es inestable.

8.1.2 Sistema ejemplo: Modos deslizantes ideales

El diseño en modos deslizantes de un controlador estándar para una planta ideal (8.1.1), i.e. despreciando la dinámica del accionador (8.1.2) suponiendo $w(t) = u(t)$, define las variables de estado como:

$$s(t) = x_d(t) - x(t) \quad (8.1.3)$$

y el controlador en modos deslizantes asociado como:

$$w(t) = M \text{sign}[s(t)] \quad (8.1.4)$$

La estabilidad de un sistema en lazo cerrado para un seguimiento de $x_d(t)$ se establece mediante el análisis de una función candidata de Lyapunov. Aunque el análisis de estabilidad para este ejemplo no requiere una derivación detallada de la función de Lyapunov, empero se utiliza este método para mantener la uniformidad a través de todo el capítulo. El candidato es:

$$V(t) = \frac{1}{2b} s^2(t) \quad (8.1.5)$$

Diferenciando a la ecuación (8.1.5) a través de las trayectorias del sistema (8.1.1) bajo el control (8.1.4) y sin la dinámica del accionador (8.1.2) se obtiene:

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{b} s(t) \dot{s}(t) = g(x, x_d, t) s(t) - M |s(t)| \quad (8.1.6)$$

En donde el término

$$g(x, x_d, t) = \frac{\dot{x}_d(t) - ax(t) - d(t)}{b}$$

tiene un acotamiento superior

$$|g(x, x_d, t)| \leq g^+ = \frac{v_d^+ + a^+ x_d^+ + d^+}{b^-} \quad (8.1.7)$$

suponiendo que $x(t) \approx x_d(t)$. Para $M \geq g^+ + \mathbf{x} / \sqrt{2b^-}$ con un valor escalar $\mathbf{x} > 0$, sustituyendo la ley de control (8.1.4) en (8.1.6) permite que

$$\dot{V}(t) \leq -\mathbf{x}V^{1/2}(t) \quad (8.1.8)$$

que testifica a cerca de la convergencia de $s(t) = 0$ para un intervalo de tiempo finito (la sección 3.5 da más detalles). La solución de (8.1.8) para una condición inicial arbitraria $V(0) > 0$ obtendrá

$$V(t) = \left(-\frac{\mathbf{x}}{2}t + V^{1/2}(0) \right)^2 \quad (8.1.9)$$

lo cual implica que $V(t)$ es idéntico a cero después de un intervalo de tiempo finito $t_{sm} \geq (2/\mathbf{x})V^{1/2}(0)$. El valor de t_{sm} es un estimado conservador del tiempo máximo necesario para alcanzar $s(t) = 0$. En la práctica, los modos deslizantes se alcanzan antes.

Subsecuentemente, el sistema es confinado a las cercanías de $s(t) = 0$ en (8.1.3) a pesar de las incertidumbres paramétricas en a y b y perturbaciones desconocidas $d(x,t)$. Un diagrama a bloques de un sistema ideal en modos deslizantes se observa en la figura 8.1

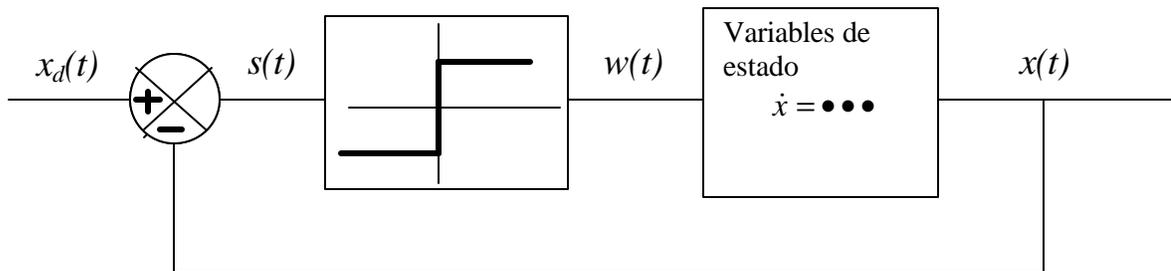


Figura 8.1 Diagrama a bloques de un lazo de control ideal en modos deslizantes. Un controlador discontinuo obliga a la señal de salida $x(t)$ de la planta que siga a la trayectoria de referencia $x_d(t)$. No existen los problemas del chattering debido a que el lazo de control esta libre de dinámicas no consideradas.

El comportamiento de la planta (8.1.1) bajo el control de los modos deslizantes (8.1.4) pueden examinarse a través del método del control equivalente (sección 2.3). Debido a que $s(t)$ es igual a cero después de alcanzar los linderos de deslizamiento, $\dot{s}(t)$ puede declararse formalmente igual a cero. Resolviendo para

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{x}_d(t) - \dot{x}(t) \\ &= b(g(x,t) - w(t)) \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

el control continuo equivalente resulta

$$w_{eq}(t) = g(x, t) \tag{8.1.11}$$

que puede ser interpretado como el valor promedio del control discontinuo $w(t)$ en (8.1.4). Aplicar el control equivalente $w_{eq}(t)$ a la planta (8.1.1) puede dar por resultado el movimiento de la misma trayectoria que al aplicar el control discontinuo $w(t)$ (8.1.4), sin embargo esto no es posible debido a que $g(x, t)$ contiene términos desconocidos. La sustitución del control equivalente $w_{eq}(t)$ en la expresión (8.1.1) hace posible el seguimiento en modos deslizantes con $x_d(t) = x(t)$.

Para la simulación del sistema (8.1.1) mediante el controlador (8.1.4), en la figura 8.2 se ha seleccionado la condición inicial $x(0) = 1$ y la ganancia $M=2.01$. Después de alcanzarse la región de deslizamiento $s(t) = 0$ en un tiempo de $t \approx 0.45$ _seg , la trayectoria del sistema $x(t)$ coincide exactamente con el valor deseado $x_d(t)$, y el controlador $w(t)$ switchea a muy alta frecuencia, creando un área sólidamente obscura. Para fines ilustrativos, observe la figura 8.2(b) donde se observa al control equivalente $w_{eq}(t)$ en (8.1.11) mediante una línea punteada dentro de esta área obscura. Ubicando los límites del parámetro en $a^- = a^+ = a = 0.5$ y $b^- = b^+ = b = 1.0$ resultando en $g^+ = 2$, lo cual lleva a una lenta convergencia de $s(t) = 0$ debido a que $\chi \approx 0.0014$ es un valor pequeño.

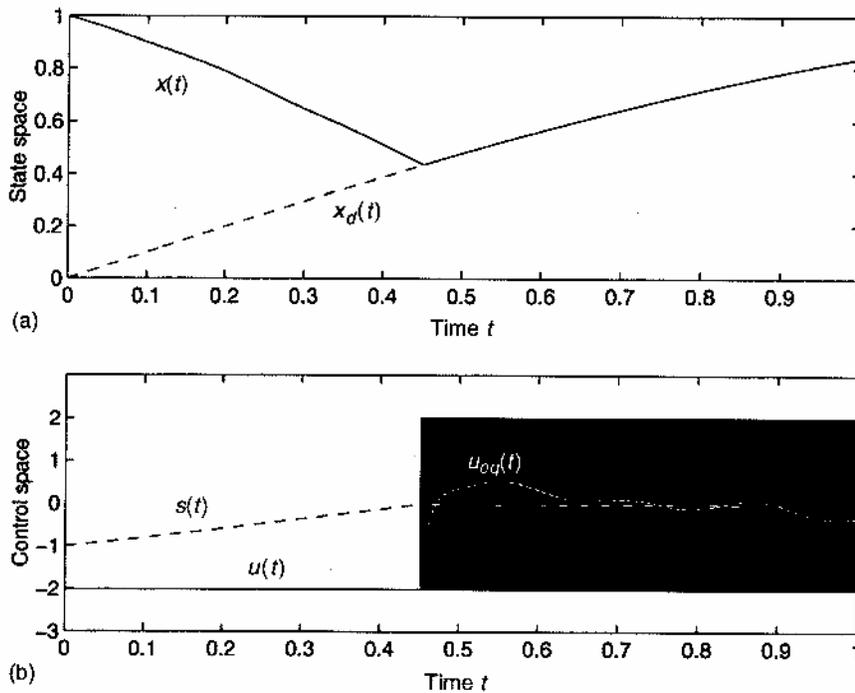


Figura 8.2 Modos deslizantes ideales en sistemas de primer orden. El vector de estado $x(t)$ converge a un valor deseado $x_d(t)$ en un intervalo de tiempo finito, i.e. $s(t)=0$ para $t \approx 0.45s$. Después, el control $u(t)$ cambia a una frecuencia infinita como se muestra en el área sombreada de (b). El control equivalente $u_{eq}(t)$ cambia para una frecuencia infinita y se muestra con una línea punteada. (a) La señal de salida del sistema y la de referencia (trayectoria deseada), (b) señal de control y variables deslizante.

8.1.3 Sistema ejemplo: Los causantes del chattering

En una aplicación práctica, las dinámica no modeladas en el sistema de lazo cerrado como las del accionador en (8.1.2) a menudo previene a los modos deslizantes ideales de que ocurran rápidas oscilaciones y finitas en amplitud. La figura 8.3 muestra un diagrama a bloques del control en lazo cerrado que incluye la dinámica del accionador (ignorada anteriormente).

A fin de estudiar las causantes de estas oscilaciones, primeramente se plantea la diferencia entre sistemas continuos y discontinuos. De acuerdo con la teoría de perturbación simple – Kokotovic (1984) provee de un claro estudio de este tema- para sistemas con ecuaciones de movimiento continuo, los componentes rápidos tales como los accionadores para un valor grande de w en (8.1.2) decaen rápidamente, dando por resultado un comportamiento estable. El componente lento de la planta (8.1.1) depende continuamente en la solución del espacio de estado en (8.1.2). En otras palabras, la solución algebraica de(8.1.2) para $m \rightarrow 0$ puede sustituirse en (8.1.1) como una aproximación, y el diseño del controlador continuo puede muy bien plantearse sin tomar en cuenta la dinámica del accionador. Para el caso de (8.1.2) $w = u$ nos lleva a la figura 8.1 y figura 8.2, como se había previsto.

En sistemas con discontinuidades, la solución de la ecuación de movimiento depende de pequeñas constantes de tiempo que presentan los componentes rápidos. Pero a diferencia de los sistemas de control continuo, un controlador discontinuo excita la dinámica no prevista en el modelo, obteniendo por resultado oscilaciones en el vector de estado. Este problema se conoce como Chattering en la literatura de control. Estas oscilaciones dan por resultado una baja precisión en el control, alta disipación de potencia en los circuitos conmutadores y desgaste en los componentes mecánicos.

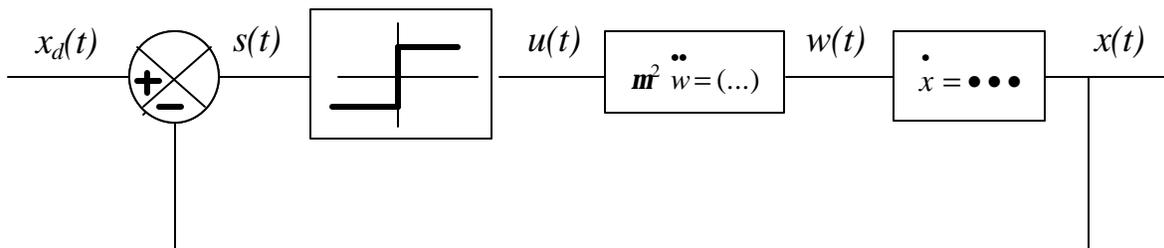


Figura 8.3 Lazo de control que no considera la dinámica del elemento accionador en el diseño de un control ideal. Los modos deslizantes no aparecen debido a que la dinámica del accionador esta excitada mediante por la rápida conmutación del controlador operando en modo discontinuo, apareciendo el fenómeno del chattering en el lazo.

La figura 8.4 muestra el comportamiento del chattering en el sistema (8.1.1) bajo la acción del controlador (8.1.4), pero con la dinámica del accionador en (8.1.2) dentro del lazo, en la figura 8.3. La figura 8.4(b), la señal de control $u(t)$ conmuta a una frecuencia finita (línea sólida), en donde la señal de salida del accionador $w(t)$ (la línea punteada) no puede seguir los pasos de la estrategia de control $u(t)$. Observe que un incremento en el ancho de banda del elemento accionador podrá incrementar la frecuencia de la señal cuadrada de control $u(t)$, pero no podría eliminar las oscilaciones. De hecho, cuando un dispositivo mecánico esta

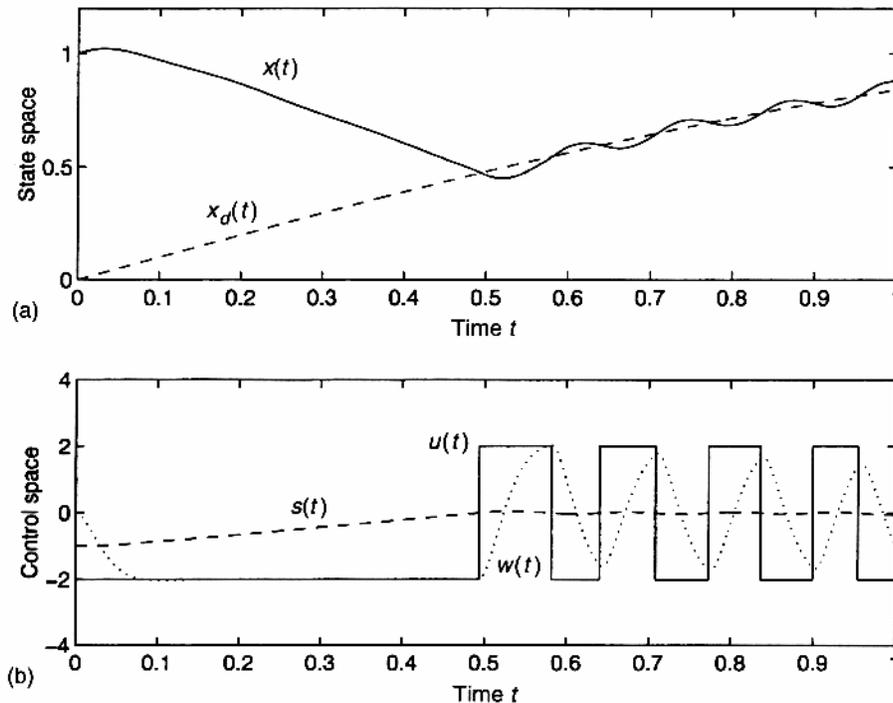


Figura 8.4 El problema del chattering en un sistema de primer orden con una dinámica del accionador de segundo orden bajo condiciones de operación de un control discontinuo. La señal de salida del accionador $w(t)$, se atrazo con respecto a la señal de la estrategia de control $u(t)$, resultando en una operación oscilatoria sobre la trayectoria sistema. (a) Señales de salida del sistema y de referencia (seguimiento), (b) señales de control y la variable de deslizamiento.

operando oscilatoriamente, tal como se presenta en la figura 8.4, a menudo se presente un ruido audible de alta frecuencia que se le denomina murmullo, parloteo o simplemente "chattering". Chattering es extremadamente dañino para los componentes mecánicas.

Para comprender aun más la naturaleza de las oscilaciones, considere la situación inmediatamente después de que la acción de control $u(t)$ conmuta desde $u(t_{sw}^-) = -M$ hasta $u(t_{sw}^+) = M$ en un tiempo t_{sw} . Un instante de tiempo después, la entrada $u(t_{sw}^+)$ y la salida $w(t_{sw}^+)$ del accionador difieren por $2M$. Sin embargo, la discrepancia entre $u(t)$ y $w(t)$ se hace menor después de que la razón de conmutación es mayor que el movimiento del sistema en (8.1.1),

$u(t)$ y $w(t)$ no están cercanas en el sentido de la teoría de perturbación simple (Utkin, 1993). Consecuentemente, la pequeña constante de tiempo no puede ser despreciada cuando se examina el comportamiento de un sistema con discontinuidades en las ecuaciones de movimiento.

Considere las trayectorias del sistema en la figura 8.4. Inicialmente $x(t)$ converge a $x_d(t)$ para un tiempo de $t \approx 0.5s$. Posteriormente, en lugar de obtener el seguimiento de la señal $x_d(t)$, $x(t)$ divaga cíclicamente entre la convergencia y la divergencia. Esto sugiere que la región $s(t) = x_d(t) - x(t) = 0$ es atractor de grandes desviaciones, pero las trayectorias pueden divergir en alguna pequeña vecindad $\mathbf{e}(\mathbf{m})$ de $s(t) = 0$, en donde el escalar \mathbf{e} depende del ancho de banda de la dinámica no modelada del accionador (8.1.2). El movimiento de la trayectoria esta confinada a esta vecindad, i.e. $|s(t)| \leq \mathbf{e}$; sin embargo, dentro de la vecindad de \mathbf{e} , acontecen oscilaciones de frecuencias y amplitud finitas.

La estabilidad para grandes desviaciones, i.e. para $|s(t)| > \mathbf{e}$, puede ilustrarse basándose en el hecho de que $u(t)$ es constante para $|s(t)| > \mathbf{e}$. La dinámica del accionador (8.1.2) decae rápidamente debido a que son estables y $w(t) \approx u(t)$ después de un corto intervalo de tiempo. En el ejemplo de la figura 8.4, la dinámica del accionador decae después de los 0.1 segundos. Debido a que el análisis de estabilidad de (8.1.5) hasta (8.1.8) puede ser utilizado para establecer la convergencia de las trayectorias del sistema para $s(t) = 0$ hasta que aparece la primer conmutación de $u(t)$ (en $t \approx 0.5s$ de la figura 8.4).

A fin de examinar el comportamiento subsecuente del sistema, suponga las condiciones de estado estable con $u(t) = w(t) = -M$ para $|s(t)| > \mathbf{e}$. La respuesta al escalón del accionador para la primer conmutación en t_{sw} desde $u(t) = -M$ hasta $u(t) = +M$ para $s(t) = 0$ esta dado mediante

$$w(t) = M \left(1 - 2 \left(\frac{t - t_{sw}}{\mathbf{m}} + 1 \right) e^{-(t - t_{sw})/\mathbf{m}} \right) \quad (8.1.12)$$

Para un intervalo de tiempo inicial $\Delta t = t - t_{sw}$, la salida del accionador $w(t) < u(t) = M$ y $\dot{V}(t) > 0$ en (8.1.6) resulta para el caso $g(x, x_d, t)s(t) > 0$. Estos es, después de que el término exponencial en (8.1.12) decae, i.e. en $\Delta t(\mathbf{m})$, $|w(t)| > g^+$ se ha establecido una vez mas y $\dot{V}(t) < 0$ indica la convergencia a los modos deslizantes en los linderos de la región $s(t) = 0$ esta dado por

$$|\Delta s| \leq \mathbf{e}(\mathbf{m}) = (g^+ + M)\Delta t(\mathbf{m}) \quad (8.1.13)$$

Derivaciones semejantes se sostienen para la próxima conmutación desde $u(t) = +M$ hasta $u(t) = -M$.

Resumiendo lo expuesto anteriormente, en el sistema no ideal, $s(t)$ esta convergiendo hacia cero para $|s(t)| > \mathbf{e}$. Para grandes desviaciones de las regiones deslizantes, el sistema en

(8.1.1) con dinámica no modelada (8.1.2) bajo el controlador (8.1.4) se comporta de forma similar al de un sistema ideal, convergiendo a la región deslizante. Finalmente, su movimiento esta confinado a la región $|s(t)| \leq \epsilon$ después de un intervalo finito de tiempo. Por encima de la vecindad $\epsilon(m)$, no es posible garantizar la estabilidad. De hecho se puede observar divergencia temporal para $|s(t)| < \epsilon$.

Para calificar cuantitativamente la influencia de las dinámicas sin modelar en el comportamiento del sistema, considere el simple caso en que

$$\begin{cases} a = 0 \\ d(x, t) = 0 \\ b = 1 \\ x_d(t) = 0 \end{cases}$$

en (8.1.1) y (8.1.3) como se muestra en la figura 8.5

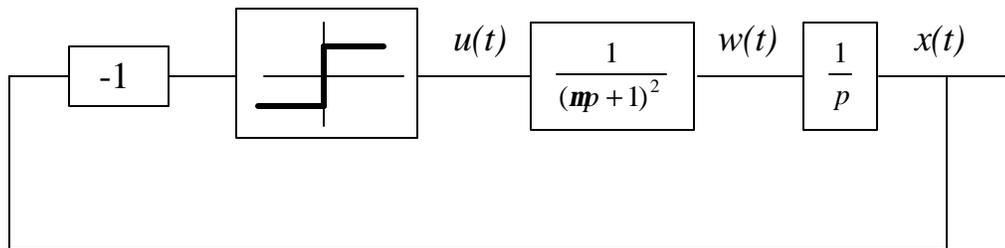


Figura 8.5 Diagrama a bloques para ilustrar la divergencia dentro de la vecindad x de la región de deslizamiento.

Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= w \\ \dot{w} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{2}{m}v - \frac{1}{m^2}w + \frac{1}{m^2}u \end{aligned} \tag{8.1.14}$$

Para el controlador $u = -M \text{sign}(x)$, la variación de signo en la función de Lyapunov

$$V = xv - 0.5w^2 \tag{8.1.15}$$

tiene una derivada con respecto al tiempo negativa

$$\dot{V} = x \left(-\frac{2}{m}v - \frac{1}{m^2}w + \frac{1}{m^2}u \right) \quad (8.1.16)$$

para valores pequeños de v y w . Esto significa que el movimiento es inestable en una vecindad de orden $\epsilon(m)$ de la región $s(x) = x = 0$.

El sistema (8.1.14) puede ser representado mediante la figura 8.6 como una alternativa a lo que se planteo en la figura 8.5.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= -M \text{sign}(x) \\ m^2 \ddot{x} + 2m\dot{x} + x &= x^* \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Los modos deslizantes no pueden aparecer en el sistema debido a que la derivada con respecto al tiempo \dot{x} es una función continua en el tiempo y no puede tener su signo opuesto a x en las cercanías del punto $x = 0$, donde el control se vuelve discontinuo.

El valor de x^* esta acotado y, debido a la teoría de perturbaciones singulares (Kokotovic et al. 1984; Kokotovic, 1996), la diferencia entre x y x^* es de m -orden. El signo de x y x^* coincide más allá de la vecindad de $\epsilon(m)$ en $s(x) = x = 0$, debido a que las magnitudes de x y x^* se decremantan, i.e. las trayectorias de estado convergen a su vecindad y después de un intervalo de tiempo finito t_1 el estado permanece en la vecindad. De acuerdo al análisis de (8.1.14), el movimiento en la vecindad de $x = 0$ es inestable.

La inestabilidad local explica porque el chattering puede aparecer en sistemas con controles discontinuos en donde existen dinámicas sin modelar. Las oscilaciones de alta frecuencia en los sistemas de control discontinuo puede analizarse en el dominio del tiempo. Estos breves períodos de divergencia aparecen después de que la variable de control de entrada $u(t)$ conmuta mientras que la variable de salida del accionador $w(t)$ es incapaz de seguir los cambios abruptos del comando de control. Las soluciones hacia el problema del chattering se enfocan en evitar las discontinuidades del control en general o mover la conmutación a un lazo del controlador donde no existan las dinámicas no modeladas. El resto de este capítulo discute varios esquemas de prevención del chattering a fin de examinar los beneficios de cada método.

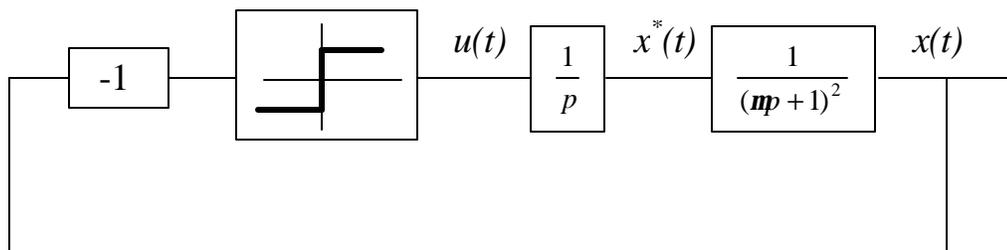


Figura 8.6 Una alternativa a la representación del ejemplo de la figura 8.5.

8.2 Solución basada en la región límite

Las soluciones en los límites (Slotine y Sastry, 1993; Slotine 1984), busca evitar las discontinuidades del control y la acción conmutativa en el lazo de control. La ley de control (8.1.4) se reemplaza mediante una función de saturación la cual se aproxima al término $sign(s)$ en un límite de la región $s(t) = 0$. Numerosos tipos de funciones de saturación se han propuesto en la literatura.

Considerando el problema 'en forma global', i.e. para $|s(t)| > \epsilon$, se tiene $sat(s) = sign(s)$. Sin embargo, en una pequeña vecindad ϵ cercana al origen, la denominada región límite es continua se cumple $sat(s) \neq sign(s)$.

Como un ejemplo ilustrativo, considere una función lineal de saturación:

$$u(t) = \begin{cases} Msign(s(t)) & \text{para } |s(t)| > \epsilon \\ \frac{M}{\epsilon}s(t) & \text{para } |s(t)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (8.2.1)$$

con una retroalimentación lineal con ganancia proporcional M/ϵ dentro de la capa límite vecina al origen, $|s(t)| \leq \epsilon$ y saturado simétricamente por M para $|s(t)| > \epsilon$ por fuera de la capa límite. Un diagrama a bloques de este sistema bajo el control (8.2.1) se muestra en la figura 8.7.

Para un análisis de estabilidad, sustituir (8.2.1) en (8.1.6) en lugar de (8.1.4) para obtener

$$\dot{V}(t) \leq \begin{cases} -\mathbf{x}V^{1/2}(t) & \text{para } |s(t)| > \epsilon \\ s(t)\left(g^+ - \frac{M}{\epsilon}s(t)\right) & \text{para } |s(t)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Examinando directamente (8.2.2) se observan las propiedades de la estabilidad de forma semejante a (8.1.8) para $|s(t)| > \epsilon$ e inestabilidad indeterminada para $|s(t)| \leq \epsilon$. Debido a que las trayectorias del sistema están garantizadas de que converjan a la capa límite. Para este ejemplo, el sistema es lineal y continuo sin los límites de la capa, por lo que la teoría de control lineal puede utilizarse para un estudio de estabilidad. Sustituyendo $u(t) = (M/\epsilon)s(t)$ en la ecuación (8.2.1) y (8.1.1) con (8.1.3) se obtiene la siguiente expresión en el dominio de Laplace:

$$\left(\mathbf{m}^2 p^3 + \mathbf{m}(2 - a\mathbf{m})p^2 + (1 - 2a\mathbf{m})p + \left(b\frac{M}{\epsilon} - a \right) \right) x(t) = h(x, x_d, t) \quad (8.2.3)$$

$$h(x, x_d, t) = b\frac{M}{\epsilon}x_d(t) + (\mathbf{m}p + 1)^2 d(x, t)$$

donde $h(x, x_d, t)$ puede interpretarse como una perturbación al lado izquierdo de la expresión (8.2.3). Los límites de estabilidad de Hurwitz al lado izquierdo de la ecuación (8.2.3) esta dada por:

$$a\mathbf{m} < 1/2 \quad (8.2.4)$$

y

$$\frac{M}{e} < \frac{2}{bm}(1-am)^2 \quad (8.2.5)$$

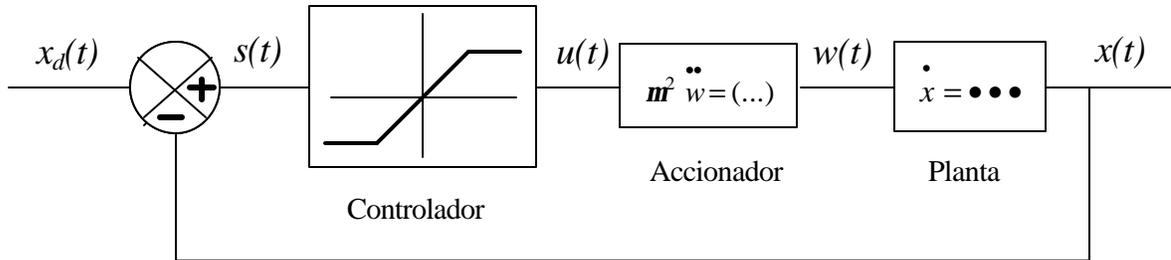


Figura 8.7 Función de saturación reemplazada para el controlador discontinuo. En lugar de que operen los modos deslizantes e forma ideal, las trayectorias del sistema son confinadas a la región interna de $s(t) = 0$.

El primer límite de estabilidad (8.2.4) establece que las dinámicas no modeladas deben ser más estables y rápidas que las dinámicas del sistema en (8.1.1). Los límites de la estabilidad en (8.2.5) define la mayor ganancia de retroalimentación en el sistema (8.1.1) siempre y cuando la dinámica del accionador sea razonablemente lineal. Ganancias altas, en particular aquellas teóricamente infinitas pertenecientes a controladores operando en modo discontinuo, resultan inestables en la vecindad de $s(t) = 0$, causando los problemas del chattering que se mostraron en la sección 8.1.

Aún mas, para las trayectorias con oscilaciones libres con valores característicos críticamente amortiguados en (8.2.3), es necesario

$$\frac{M}{e} < \frac{3\sqrt{2}-4}{bm}(1-2am)^2$$

Es interesante notar en este ejemplo que la región límite de ancho e en forma global depende linealmente de la constante de tiempo m del accionador e inversamente lineal de los recursos disponibles en el controlador (M). Un valor de $e = 0.1$ se selecciona para la simulación de la figura 8.8, lo cual lleva a la estabilidad, pero con respuesta subamortiguada (valores característicos complejo conjugados). Consecuentemente, se presenta un sobreimpulso al momento que $x(t)$ converge a $x_d(t)$.

Uno de los beneficios del método de la región límite es que el método de diseño del control en modos deslizantes puede explotarse al derivarse un controlador continuo. La propiedad de invarianza del control en modos deslizantes se conserva en el sentido de que las trayectorias del sistema son confinadas a la vecindad de $d(e)$ en la región deslizante $s(t) = 0$,

en lugar de exactamente $s(t) = 0$ como en los modos deslizantes ideales (figura 8.1 y 8.2). Sin embargo, el comportamiento del sistema dentro de la vecindad en $d(e)$ no está definida, i.e. por lo que no está garantizada la convergencia a cero. Este tipo de diseño es parte de una clase de controladores robustos que satisfacen la condición de “acotamiento globalmente uniforme” propuesto por Leitmann (1981). Observe que realmente no se presentan los modos deslizantes, debido a que la conmutación es reemplazada mediante una aproximación continua.

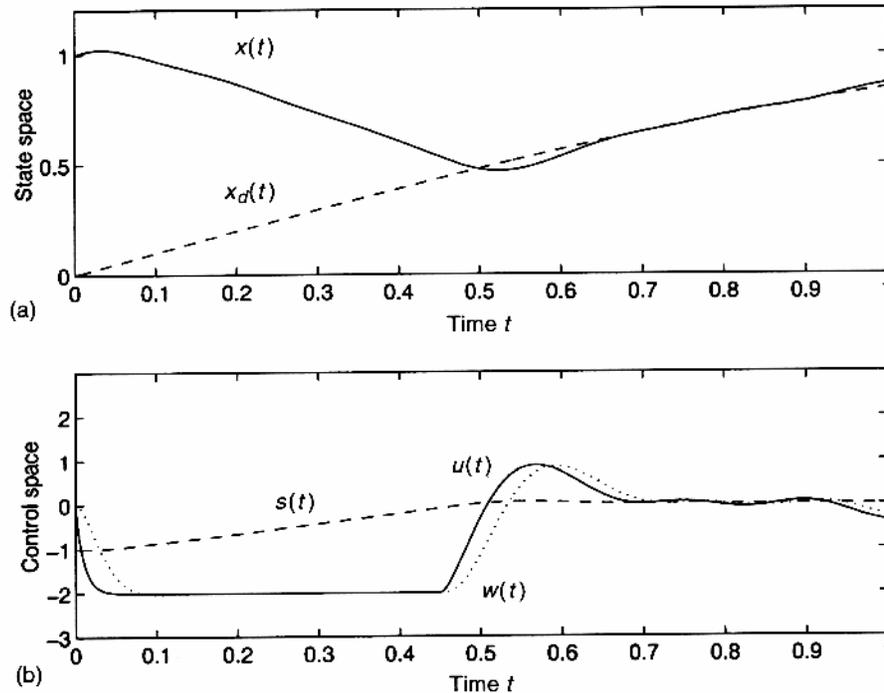


Figura 8.8 Control discontinuo aproximado mediante una función de saturación en los límites de las trayectorias del sistema en el espacio libre del chattering. El estado $x(t)$ converge a $x_d(t)$, pero no los sigue exactamente como en los modos deslizantes ideales: (a) La señal de salida y la de referencia, (b) acciones de control y variable de deslizamiento.

8.2 Solución basada en observadores

El método discutido en el tema 8.2 está basado en el hecho de establecer los límites para evitar generar los modos deslizantes, reemplazando la conmutación discontinua mediante una función de saturación continua. Sin embargo muchos sistemas son inherentemente controles discontinuos, e.g. los voltajes de entrada de los convertidores de potencia o los Drivers eléctricos. Cuando se implementa un controlador continuo, una técnica como la modulación del ancho de pulso (PWM) tiene que ser explotada para adaptar la ley de control para sistemas con estradas discontinuas. Los avances recientes en circuitos de alta velocidad junto con los insuficientes métodos de control lineal para plantas no lineales de orden superior, tales como los motores de AC, ha sido la principal razón de que los modos deslizantes sean tan populares. Comercialmente están disponibles los convertidores electrónicos cuyas frecuencias de conmutación son manejables en los rangos de los cientos de kilohertz. Por lo tanto parece injustificable pasar por alto a un sistema cuyas señales de control discontinuas, e.g. los

esquemas en PWM, implementado un control de naturaleza continua. Más bien, las especificaciones del sistema piden ser tratadas mediante métodos que prevengan al chattering mientras se preservan las discontinuidades del control.

Un observador asintótico en el lazo de control puede eliminar el problema del chattering a pesar de las leyes de control discontinuo. La idea clave, tal como la propuso Bondarev (1985), es la de generar los modos deslizantes ideales en un lazo auxiliar para el observador en lugar del principal lazo de control. Los modos deslizantes ideales son factibles en el lazo del observador debido a que son enteramente generados en el software de control y por lo tanto, este no contiene alguna dinámica sin considerar.

El lazo principal sigue la dinámica del lazo del observador. A pesar de aplicar una señal de control discontinua con una acción conmutativa sobre la planta, los fenómenos del chattering no aparecerán y el sistema se comportara como si un control equivalente continuo fuere aplicado. La figura 8.9 muestra un diagrama a bloques del sistema utilizado en este capítulo junto con el observador auxiliar.

Defina un observador de primer orden para el sistema (8.1.1) como

$$\dot{\hat{x}}(t) = ax(t) + bu(t) + L_1 \bar{x}(t) \tag{8.3.1}$$

Donde L_1 es la ganancia de retroalimentación lineal para el error observado $\bar{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. El conocimiento exacto de los parámetros del sistema a y b son supuestos en (8.3.1) para facilitar la presentación. En el caso de incertidumbre paramétrica, a y b son reemplazados mediante los valores estimados \hat{a} y \hat{b} resultando en un análisis más complejo.

La dinámica lineal del error en el observador esta gobernada por la ecuación

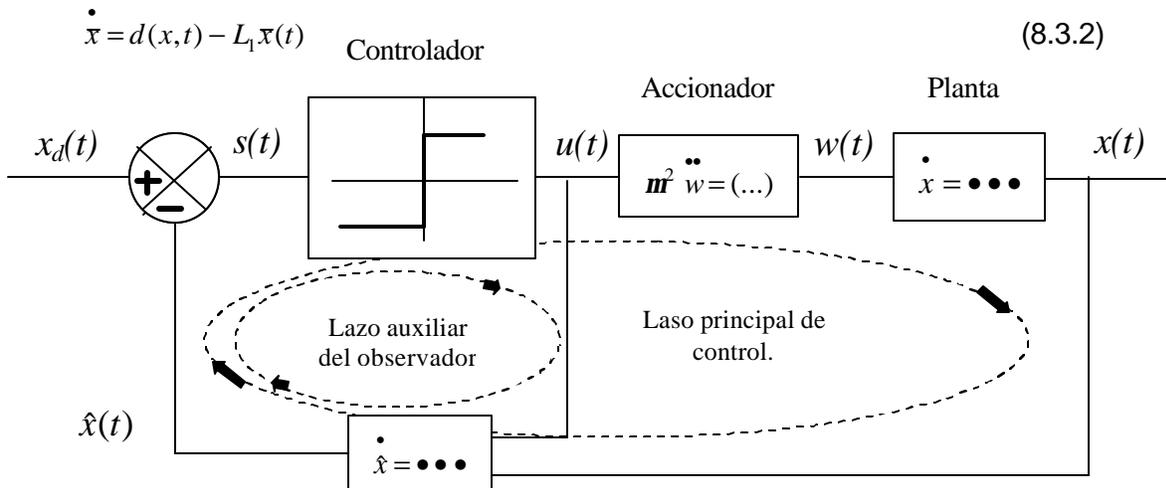


Figura 8.9 Lazo de control con lazo auxiliar del observador. Modos deslizantes ideales aparecen en la región de $s(t) = 0$ debido a que el lazo del observador esta libre de dinámicas sin modelar. La señal de salida de la planta $x(t)$ sigue a la salida del observador $\hat{x}_d(t)$ sin chattering a pesar de que el controlador $u(t)$ opera en modo discontinuo aplicado al lazo principal junto con la dinámica del actuador.

El error $\bar{x}(t)$ en (8.3.2) es estable y acotado para

$$|\bar{x}(t)| \leq \frac{d^+}{L_1} \quad (8.3.3)$$

con la perturbación acotada en $|d(x,t)| \leq d^+$. Introduciendo un observador deslizante en la región

$$\hat{s}(t) = x_d(t) - \hat{x}(t) \quad (8.3.4)$$

definiendo al controlador en modos deslizantes para el lazo del observador sea:

$$u(t) = M \text{sign} \hat{s}(t) \quad (8.3.5)$$

para reemplazar (1.3) en (8.1.4). La estabilidad del lazo auxiliar del observador se examina mediante una función candidata a Lyapunov como en (8.1.5):

$$\hat{V}(t) = \frac{1}{2b} \hat{s}^2(t) \quad (8.3.6)$$

Sustituyendo (8.3.1) en (8.3.6) bajo el control de (8.3.5) revela que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(t) &= \frac{1}{b} \hat{s}(t) \dot{\hat{s}}(t) \\ &= \frac{1}{b} \left(\dot{x}_d(t) - ax(t) - L_1 \bar{x}(t) \right) \hat{s}(t) - M |\hat{s}(t)| \\ &\leq \frac{1}{b^-} (v_d^+ + a^+ x_d^+ + d^+) |\hat{s}(t)| - M |\hat{s}(t)| \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

en donde la acotación del error observado (8.3.3) se utilizo para reducir la expresión. La acotación (8.1.7) del error en el observador independiente del sistema y la condición $M \geq g^+ + \mathbf{x} / \sqrt{2b^-}$ lleva a obtener:

$$\dot{\hat{V}} \leq -\mathbf{x} \hat{V}^{1/2}(t) \quad (8.3.8)$$

de forma semejante a la suposición establecida en (8.1.8). Los modos deslizantes se establecen en el lazo del observador después de un intervalo de tiempo finito como en (8.1.9), y posteriormente se sostendrá la condición $\hat{s}(t) = 0$.

Para comprender el funcionamiento del sistema en forma global en los modos deslizantes sobre el lazo del observador, se emplea el método del control equivalente.