

Fondo Matemático



El control del modo deslizante no es sólo una clase de sistemas de control no lineal, pero también inherentemente introduce discontinuidades en el lazo del control. Sin embargo, la mayoría de las herramientas para el análisis del sistema y síntesis del control se desarrolló para sistemas lineales continuos y sistemas no lineales. Por consiguiente, estas herramientas no son aplicables a los métodos de control discontinuos como el control del modo deslizante y sistemas de estructura variable.

Este capítulo proporciona el fondo matemático y las herramientas más importantes desarrolladas para los sistemas discontinuos, en particular para el diseño de control de modo deslizante. Puesto que se piensa principalmente que este libro provee herramientas suficientes para el diseño del control práctico en aplicaciones en la vida real, el lector interesado refiérase a Utkin (1992) para una descripción matemática más detallada de las técnicas del modo deslizante.

2.1 Declaración del problema

El bosquejo de los métodos de diseño en la sección 1.3 asume que las propiedades de modos deslizantes en espacios canónicos (1.2.3) se conservarían para sistemas arbitrarios. Estas propiedades -reducción de orden e invarianza- se revelaron después que la ecuación del modo deslizante se había derivado. Era un problema fácil desde la ecuación de la superficie conmutada también era la ecuación del modo deslizante; vea ecuaciones (1.2.2) y (1.2.4). Éste no es el caso para los sistemas con ecuaciones de movimiento con respecto a las variables de estado arbitrarias. Pueden ilustrarse los problemas analíticos que se declaran en tales sistemas con modos deslizantes con la ayuda de un sistema de segundo orden lineal

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u + d_1f(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u + d_2f(t)$$

Con control relevado

$$u = -M \operatorname{sign}(s)$$

$$s = c_1x_1 + c_2x_2$$

Todos los parámetros a_{ij} , b_i , c_i ($i, j=1,2$) y M son constantes; $f(t)$ es una perturbación limitada.

Similar a los sistemas relevados en espacio canónico, las trayectorias de estado en el plano de estado (x_1, x_2) pueden orientarse hacia la línea conmutada $s=0$ un modo deslizante se declara a lo largo de esta línea. Para analizar el comportamiento del sistema en modo deslizante, la pregunta a responder es: ¿Cuál es la ecuación del movimiento? En contraste a los sistemas de segundo orden en espacio canónico, $\ddot{x}_2 = -c_2^{-1}c_1x_1$ resultante de $s=0$ no es una ecuación de movimiento. Para el caso particular $b_1=0$, sustitución de $-c_2^{-1}c_1x_1$ por \dot{x}_2 en la primera ecuación de (2.1.1) nos permite derivar la ecuación de primer orden del modo deslizante

$$\dot{x} = (a_{11} - a_{12}c_2^{-1}c_1)x_1 + d_1f(t)$$

Como podemos ver, la propiedad de reducción de orden toma lugar pero la invarianza con respecto a la perturbación no, donde el lado derecho de la ecuación de movimiento depende de $f(t)$ directamente. Esto muestra que los problemas fundamentales relacionados a los modelos matemáticos de modos deslizantes surge de los sistemas descritos en la forma general (1.4.1) y (1.4.2). Para las condiciones determinadas del modo deslizante para ser insensible a las incertidumbres del sistema, los métodos matemáticos especiales necesitarán ser desarrollados.

Luego, habiendo derivado las ecuaciones del modo deslizante, la dinámica deseada puede ser asignada por elección propia de las ecuaciones de discontinuidad de superficie como la primera fase del procedimiento del plan perfilada en la sección 1.4. La segunda fase implica la selección de las entradas del control discontinuo para dar fuerza al modo deslizante en la intersección de las superficies. Para resolver este problema, las condiciones para que el modo deslizante exista deben ser obtenidas. Para sistemas con control escalar, esta condición puede ser interpretada fácilmente desde un punto de vista geométrico: las trayectorias de estado deben ser orientadas hacia la superficie discontinua en esta vecindad, o la variable describiendo la desviación de la superficie y su derivada respecto al tiempo debe tener signos opuestos. Los componentes del control bi-dimensional en sistemas de tercer orden (1.3.1) fueron diseñados usando estas condiciones. Por lo general, el problema de fortalecer el modo deslizante en la intersección de un conjunto de superficies discontinuas no puede ser reducido a un tratamiento secuencial de subproblemas escalares. Esto puede ser ilustrado por un sistema de tercer orden controlable con un vector control bi-dimensional:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 + u_1 - 2u_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 2u_1 + u_2\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= -\text{sign}(s_1) & s_1 &= x_1 + x_2 \\ u_2 &= -\text{sign}(s_2) & s_2 &= x_1 + x_3\end{aligned}$$

El análisis de las condiciones para que el modo deslizante exista en la intersección de las superficies discontinuas puede ser realizado en términos de proyección del movimiento en subespacio (s_1, s_2) :

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= -\text{sign}(s_1) + 2\text{sign}(s_2) \\ \dot{s}_2 &= -2\text{sign}(s_1) - \text{sign}(s_2)\end{aligned}$$

Las trayectorias de estado son líneas rectas en el plano de estado (s_1, s_2) ; Ver figura 2.1. Es del diagrama que, para cualquier punto en $s_1=0$ o $s_2=0$, las trayectorias de estado no se orientan hacia la línea, por consiguiente el modo deslizante no existe en cualquier línea conmutada tomada separadamente.

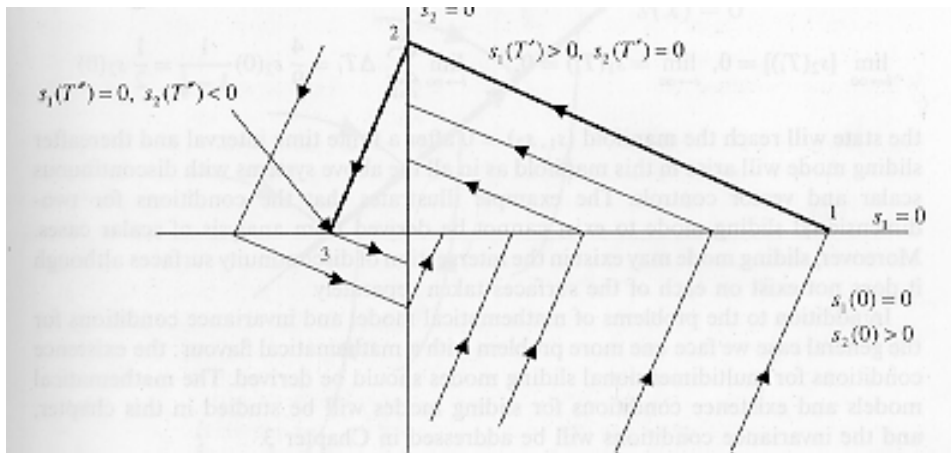


Figura 2.1 Modo deslizante en el sistema con control bi-dimensional.

Al mismo tiempo, las trayectorias convergen en la intersección de ellas en el origen del subespacio (s_1, s_2) . Nos permite calcular el tiempo necesitado por el estado para alcanzar el origen. Para las condiciones iniciales $s_1(0)=0, s_2(0)>0$ (punto 1)

$$\dot{s}_1 = 1$$

$$\dot{s}_1 = -3 \quad (0 < t < T')$$

Y $s_2(T')=0, T' = \frac{1}{3}s_2(0), s_1(T') = \frac{1}{3}s_2(0)$ en el punto 2.

$$\dot{s}_1 = -3$$

$$\dot{s}_1 = -1 \quad (T' < t < T' + T'')$$

Para el movimiento adicional

Y en el punto 3

Esto significa que

Desde

$$s_1(T', T'') = 0 \quad T'' = \frac{1}{9}s_2(0) \quad s_2(T', T'') = -\frac{1}{9}s_2(0)$$

$$\Delta T_1 = T_i - T_{i-1} = \frac{4}{9}s_2(T_{i-1}) = \frac{4}{9}s_2\left(\frac{1}{9}\right) s_2(0) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, y \quad T_0 = 0$$

$$s_2(T_1) = -\frac{1}{9}s_2(0) \quad T_1 = T' + T'' = \frac{4}{9}s_2(0)$$

$$|s_2(T_1)| = \left|\frac{1}{9}s_2(0)\right| \quad s_1(T_1) = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [s_2(T_i)] = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} [s_1(T_i)] = 0. \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta T_i = \frac{4}{9}s_2(0) \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2}s_2(0)$$

El estado alcanzara la variable $(s_1, s_2)=0$ después de un intervalo de tiempo finito y después de esto el modo deslizante surgirá en esta variable como en todos los sistemas anteriores con discontinuidad escalar y vectores de controles. El ejemplo ilustra que las condiciones para que el modo bi-dimensional exista, no pueden ser derivadas del análisis de casos escalares. Aun más, el modo deslizante puede existir

en la intersección de superficies discontinuas aunque no puede existir cuando cada una de las superficies se toma separadamente.

En adición a los problemas del modelo matemático y condiciones de invarianza por lo general enfrentamos un problema mas con un especial sabor matemático: Las condiciones de existencia para modos deslizantes multidimensionales pueden derivarse. Los modelos matemáticos y las condiciones de existencia para modos deslizantes serán estudiadas en este capitulo y las condiciones de invarianza serán revisadas en el capitulo 3.

2.2 Regularización

El primer problema matemático en el contexto de nuestro plan para emplear modos deslizantes para diseñar sistemas de control retroalimentado es una descripción matemática de sus movimientos. Esto surge debido a discontinuidades en las entradas del control y por tanto en los lados derechos de las ecuaciones diferenciales de movimiento. Los sistemas discontinuos no son un asunto de la teoría convencional de ecuaciones diferenciales que se tratan con funciones de estado continuas. La teoría convencional no contesta las preguntas fundamentales de si la solución existe y si la solución es única. Como es debido, incluso en nuestros simples ejemplos de sistemas de segundo orden en forma canónica (1.2.1), nuestro método de derivar las ecuaciones de modos deslizantes no era legítimo. Estrictamente hablando, el método más convencional exige que el lado derecho de una ecuación diferencial, consista de funciones $f(x)$ que satisfagan la condición de Lipschitz $\|f(x_1) - f(x_2)\| < L\|x_1 - x_2\|$ con algún número positivo L , conocido como la constante de Lipschitz, para cualquier x_1 y x_2 . La condición implica que la función no crece más rápido que alguna función lineal, no seria el caso para las funciones discontinuas si x_1 y x_2 que están cerca de un punto de discontinuidad.

La solución $x(t) = x(t_1)e^{-c(t-t_1)}$ debe satisfacer la ecuación diferencial original (1.2.1) en lugar de la ecuación heurística (1.2.2). La substitución directa de $x(t)$ en (1.2.1) guiando a $s(t) = 0$ y $(c_2 - ca_2 + a_1)x(t_1)e^{-c(t-t_1)} = -M \text{sign}(0) + f(t)$. Desde la función $\text{sign}(\cdot)$ No es definida como cero, no podemos verificar si la solución $x(t)$ es correcta.

En situaciones donde los métodos convencionales no son aplicables, el siguiente paso es emplear diferentes métodos de regularización o remplazar el problema original por uno estrechamente similar para que los métodos familiares puedan aplicarse. Para sistemas con controles discontinuos, la regularización aproximada tiene una interpretación física simple. La incertidumbre del comportamiento del sistema en las superficies discontinuas aparecen a causa de que las ecuaciones de movimiento (1.4.1) y (1.4.2) son un modelo de sistema ideal. El modelo ideal abandona factores no ideales como pequeñas imperfecciones de los dispositivos interruptores (retraso, histéresis, pequeñas constantes de tiempo), dinámicas no modeladas de sensores y actuadores, etc. Incorporarlos en el modelo del sistema hace el punto de Discontinuidad aislado en el tiempo y elimina la ambigüedad del comportamiento del sistema.

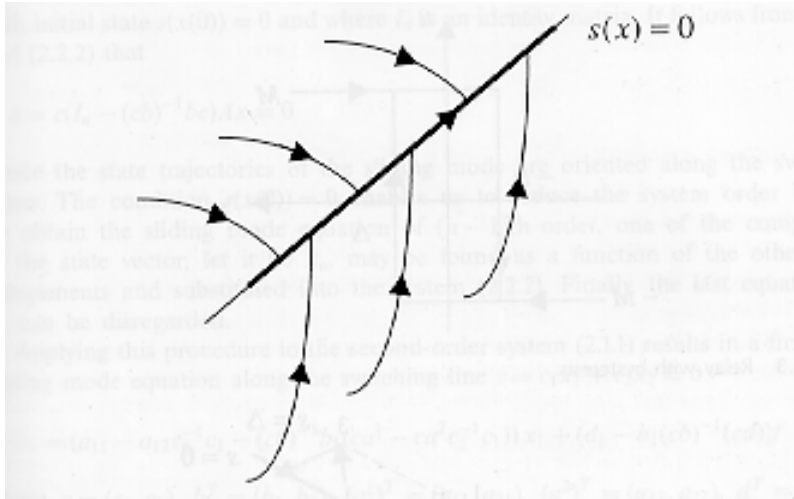


Figura 2.2 Modo deslizante en un sistema lineal.

Luego, se asumen parámetros pequeños que caracterizan a todos estos factores para tender a cero. Si el límite de las soluciones existe con los pequeños parámetros tendientes a cero, entonces ellas son tomadas como la solución a las ecuaciones describiendo el modo deslizante ideal. Como un procedimiento límite es el método de *regularización* por derivación de las ecuaciones de modo deslizante en sistemas con control discontinuo.

Para ilustrar el método de regularización, consideramos un sistema lineal de tiempo invariable con una entrada de control, una función relevadora escalar de una combinación lineal de los componentes de estado:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (x \in \mathbb{R}^n, \hat{A}^n)q \quad (2.2.1)$$

A y b son $n \times n$ y $n \times 1$ matrices constantes, $u = M \operatorname{sign}(s)$, M es una constante positiva escalar, $s = cx$, $c = [c_1, c_2, \dots, c_n] = \text{const}$. Como en los ejemplos en el capítulo 1 y la sección 2.1, las trayectorias de estado pueden ser orientadas en una dirección hacia el plano conmutado $s(x) = 0$ en el espacio de estado $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ahora el modo deslizante ocurre en el plano (Figura 2.2) y la ecuación de movimiento puede ser encontrada. Un problema similar quedaba sin responder para el sistema (2.1.1).

Siguiendo el procedimiento de regularización, imperfecciones pequeñas de un dispositivo conmutado pueden ser tomadas en cuenta. Si un dispositivo relevado es implementado con un lazo de histéresis de ancho 2Δ (Figura 2.3), entonces las trayectorias de estado oscilan en una vecindad Δ del plano conmutado (Figura 2.4). El valor de Δ es asumido para ser pequeño tal que las trayectorias de estado puedan ser aproximadas por líneas rectas con vectores de velocidad de estado constantes $Ax + bM$ y $Ax - bM$ en la vecindad de algún punto x en el plano $s(x) = 0$.

Calculando intervalos de tiempo Δt_1 y Δt_2 e incrementos Δx_1 y Δx_2 en el vector de estado para transiciones del punto 1 al punto 2 y del punto 2 al punto 3, respectivamente:

$$\Delta t_1 = \frac{-2\Delta}{\dot{s}^+} = \frac{-2\Delta}{cAx + cbM}$$

$$\Delta x_1 = (Ax + bM)\Delta t_1 = (Ax + bM) \frac{-2\Delta}{cAx + cbM}$$

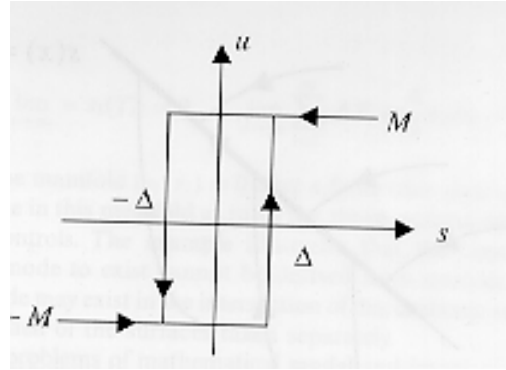


Figura 2.3 Relevador con histéresis.

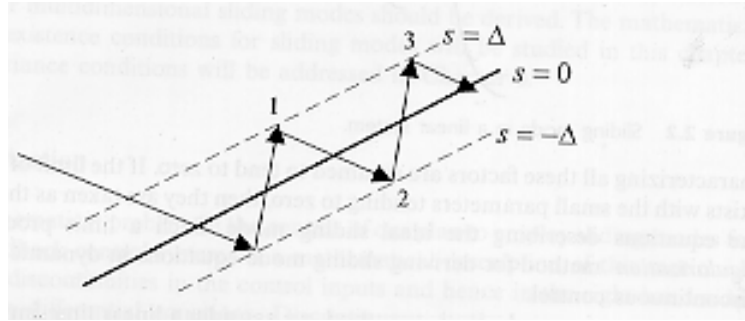


Figura 2.4 oscilaciones en una vecindad de la superficie conmutada.

Similarmente para el segundo intervalo

$$\Delta t_2 = \frac{2\Delta}{\dot{s}^-} = \frac{2\Delta}{cAx + cbM}$$

$$\Delta x_2 = (Ax - bM)\Delta t_2 = (Ax - bM) \frac{2\Delta}{cAx - cbM}$$

Note que, por suposición nuestra, el modo deslizante existe en el sistema ideal, por consiguiente los valores s y \dot{s} tienen signos opuestos, i.e. $\dot{s}^+ = cAx + cbM < 0$ y $\dot{s}^- = cAx - cbM > 0$. esto implica que ambos intervalos de tiempo Δt_1 y Δt_2 son positivos. Note que las desigualdades pueden sostenerse si $cb < 0$. la velocidad de estado promedio dentro del intervalo de tiempo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ pueden ser encontradas como

$$\dot{x}_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = Ax - (cb)^{-1} bcAx$$

El siguiente paso del procedimiento de regularización implica que el ancho de lazo de histéresis D debe tender a cero. Sin embargo, no es necesario calcular $\lim_{D \rightarrow 0} (\dot{x}_{av})$: el procedimiento limite fue realizado implícitamente cuando asumimos que las trayectorias de estado son líneas rectas y las velocidades de estado son constantes. Esta es la razón por la cual \dot{x}_{av} no depende de D . Y por consiguiente un modelo más exacto, el modo deslizante en el plano $s(x)=0$ es gobernado por

$$\dot{x} = (I_n - (cb)^{-1} bc)Ax \quad (2.2.2)$$

Con el estado inicial $s(x(0))=0$ y donde I_n es una matriz identidad. Sigue de (2.2.1) y (2.2.2) que

$$\dot{s} = c(I_n - (cb)^{-1}bc)Ax \approx 0$$

Por lo tanto las trayectorias de estado del modo deslizante están orientadas a lo largo del plano conmutado. La condición $s(x(0))=0$ nos permite que reduzcamos el orden del sistema por uno. Para obtener la ecuación de modo deslizante de $(n-1)$ orden, uno de los componentes del vector de estado, permítale ser x_n , puede ser encontrado como una función del orden $n-1$ componentes y sustituido en el sistema (2.2.2). Finalmente, la última ecuación para x_n puede ser omitida.

Aplicando este procedimiento al sistema de segundo orden (2.1.1) resultando en una ecuación de modo deslizante de primer orden a lo largo de la línea conmutada $s=c_1x_1 + c_2x_2=0$:

$$\dot{x}_1 = (a_{11} - a_{12}c_2^{-1}c_1 - (cb)^{-1}b_1(ca^1 - ca^2c_2^{-1}c_1))x_1 + (d_1 - b_1(cb)^{-1}(cd))f$$

donde $c=(c_1, c_2)$, $b^T=(b_1, b_2)$, $(a_1)^T=(a_{12}, a_{22})$, $d^T=(d_1, d_2)$, y cb y c_2 son asumidos para ser diferentes de cero. Como podemos ver, para este caso general de un sistema lineal de segundo orden, la ecuación de modo deslizante es de orden reducido y depende de los parámetros de la planta, perturbaciones y coeficientes de las ecuaciones de la línea conmutada, pero no depende del control.

Para sistemas en forma canónica (1.2.1) y (1.2.3), el anterior método de regularización puede servir como validación de que las ecuaciones de modo deslizante de orden reducido (1.2.2) y (1.2.4) no dependen de los parámetros de la planta ni de las perturbaciones.

Exactamente las mismas ecuaciones para nuestros ejemplos resultan de una regularización basada en una imperfección de tipo "retraso" (Andre y Seibert, 1956). Es interesante notar que sistemas no lineales de un orden arbitrario con una superficie discontinua se estudiaron en este papel y las ecuaciones de movimiento probaron ser lo mismo para ambos tipos de imperfecciones – histéresis y retraso. Este resultado puede ser interpretado fácilmente en términos de intervalos de tiempo relativo para la entrada del control para tomar cada uno de los dos valores extremos.

Para un sistema de un orden arbitrario con control escalar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x, f, \hat{I}, \hat{A}^n, u(x), \hat{I}, \hat{A} \\ u(x) &= \begin{cases} u_+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ u_-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Los componentes del vector f , las funciones escalares $u^+(x)$, $u^-(x)$ y $s(x)$ son continuas y lisas, y $u^+(x) \neq u^-(x)$. Asumimos que el modo deslizante ocurre en la superficie $s(x)=0$ y trata de derivar las ecuaciones de movimiento usando el método de regularización. Otra vez, dejamos que el control discontinuo sea implementado con algunas imperfecciones no especificadas; se conoce el control para tomar uno de los dos valores de los extremos, $u_+(x)$ o $u_-(x)$, y los puntos discontinuos son aislados en el tiempo. Como un resultado, la solución existe en el sentido convencional y no importa si tratamos con pequeña histéresis, retraso de tiempo o constantes de tiempo que fueron ignoradas en el modelo ideal.

Como en el sistema (2.2.1) con imperfección histéresis, los vectores de velocidad de estado $f^+=f(x, u^+)$ y $f^-=f(x, u^-)$ son asumidos para ser constantes para algún punto x en la superficie $s(x)=0$ con un corto intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. Dejamos el intervalo de tiempo consistente de dos juegos de intervalos Δt_1 y Δt_2 tal que $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, $u=u^+$ para

el tiempo del juego D_{t_1} y $u=u^-$ para el tiempo del juego D_{t_2} . Entonces el incremento del vector de estado después del intervalo de tiempo D_t es encontrado como

$$Dx = f^+ D_{t_1} + f^- D_{t_2}$$

y la velocidad de estado promedio como

$$\dot{x}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = m f^+ + (1-m) f^-$$

Donde $m = D_{t_1}/D_t$ es el tiempo relativo del control para tomar el valor u^+ y $(1-m)$ es el tiempo relativo para tomar el valor u^- , $0 \leq m \leq 1$. para obtener el vector \dot{x} , el tiempo Δt deberá tender a cero. Sin embargo, no necesitamos realizar este procedimiento limite, se esconde en nuestra suposición que los vectores de velocidad de estado son constantes con intervalos de tiempo D_t , por consiguiente la ecuación

$$\dot{x} = m f^+ + (1-m) f^- \quad (2.2.4)$$

Representa el movimiento durante el modo deslizante. Desde las trayectorias de estado durante el modo deslizante están en la superficie $s(x)=0$, el parámetro m debe ser seleccionado tal que el vector de velocidad de estado del sistema (2.2.4) es en el plano tangencial para esta superficie, o

$$\dot{s} = \text{grad}[s(x)] \cdot \dot{x} = \text{grad}[s(x)] [m f^+ + (1-m) f^-] = 0 \quad (2.2.5)$$

con $\text{grad}[s(x)] = [\partial s / \partial x_1 \dots \partial s / \partial x_n]$.

La solución a (2.2.5) es dada por

$$m = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} \quad (2.2.6)$$

Substitución de (2.2.6) en (2.2.4) resulta en la ecuación de modo deslizante

$$\dot{x} = f_{sm}, \quad f_{sm} = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad}(s) \cdot f^+}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (2.2.7)$$

Representando el movimiento en el modo deslizante con condición inicial $s[x(0)]=0$. Note que el modo deslizante ocurre en la superficie $s(x)=0$, por consiguiente las funciones \dot{s} y s tienen signos diferentes en la vecindad de la superficie (Figura 2.5) y $\dot{s}^+ = (\text{grad } s) \cdot f^+ < 0$, $\dot{s}^- = (\text{grad } s) \cdot f^- > 0$. Como sigue de (2.2.6), la condición $0 \leq m \leq 1$ se sostiene para el parámetro m . Es fácil verificar la condición $\dot{s} = (\text{grad } s) \cdot f_{sm} = 0$ para las trayectorias de sistema (2.2.7) y para mostrar ellos se confinan a la superficie interruptora $s(x) = 0$. Como podría esperarse, la substitución directa de $\text{grad } s = c$, $f^+ = Ax + bu^+$ y $f^- = Ax + bu^-$ en (2.2.7) resulta en la ecuación de modo deslizante (2.2.2) derivada para el sistema lineal (2.2.1) con plano de discontinuidad $s(x) = cx = 0$ vía regularización de histéresis.

Es interesante notar que el método de regularización anterior para derivar la ecuación de modo deslizante puede ser considerado como una interpretación física del famoso método *Filippov*. El método es pensado para la continuación de la solución a una superficie discontinua por ecuaciones diferenciales con términos discontinuos del lado derecho de la ecuación (Filippov, 1988). De acuerdo con este método, los extremos de todos los vectores de velocidad de estado en la vecindad de un punto en una superficie discontinua deben ser complementados por un mínimo conjunto convexo y el vector de velocidad de estado del movimiento deslizante debe

pertenecer a este conjunto. En nuestro caso hay dos puntos, los extremos de

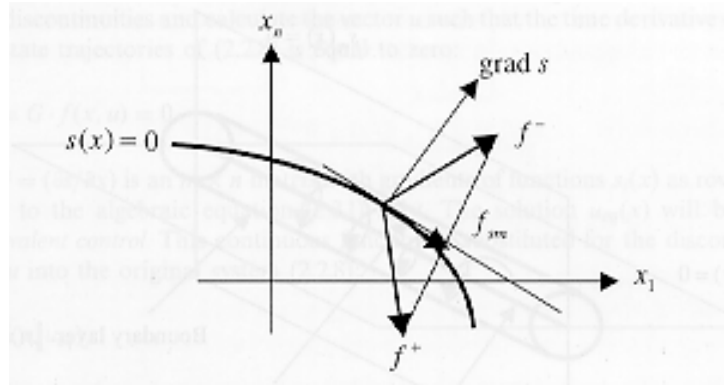


Figura 2.5 Ecuación de modo deslizante por el método Filippov.

Los vectores f^+ y f^- , y el mínimo conjunto convexo es la línea recta que conecta sus extremos. La ecuación de esta línea es exactamente el lado derecho de la ecuación (2.2.4). La intersección de la línea con el plano tangencial define el vector de velocidad de estado en el modo deslizante, del lado derecho de la ecuación de modo deslizante. Es claro que el resultado del método Filippov coincide con la ecuación derivada por la regularización aproximada.

Los métodos discutidos anteriormente y los métodos estudiados por Andre y Seibert (1956) fueron desarrollados bajo suposiciones bastante restrictivas: una clase especial de imperfecciones (retraso o histéresis) el control puede tomar solo dos valores extremos, sistemas con control escalar y una superficie de discontinuidad. El concepto general de regularización abarca una clase más amplia de imperfecciones (como aproximación continua de una función discontinua) y modos deslizantes en la intersección de varias superficies es regularización vía *capa del limite* (Utkin 1971/72, 1992). Describimos la idea de una capa del limite aproximada para un sistema arbitrario con control vector:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x, f \in \hat{A}^n, u(x) \in \hat{A}^m \\ u(x) &= \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases} & \text{(Doble componente)} \end{aligned}$$

Los componentes del vector $s(x)^T = [s_1(x) \dots s_m(x)]$ son m funciones lisas y el componente número i del control sufre discontinuidades en la superficie número i si $s_i(x)=0$. Similar al modo deslizante en la intersección de dos planos (2.1.2), el modo deslizante puede ocurrir en la variable $s(x)=0$. Para obtener las ecuaciones de modo deslizante, el control ideal en (2.2.8) es reemplazado por un nuevo control u tal que la solución para (2.2.8) con este control existe en el sentido convencional. Debido a la sustitución, las trayectorias no son confinadas para la variable $s(x)=0$ pero corre en su capa del limite de anchura $\Delta > 0$ (Figura 2.6):

$$\|s(x)\| \leq \Delta \quad \|s\| = (s^T s)^{1/2}$$

Las imperfecciones tomadas en cuenta en el control u no son especificadas y solo se sabe que la solución para (2.2.8) con el nuevo control existe en el sentido convencional. Como una regla, las imperfecciones de la vida real pertenecen a esta clase (incluyendo histéresis, retraso de tiempo y pequeñas constantes de tiempo ignoradas en el modelo ideal).

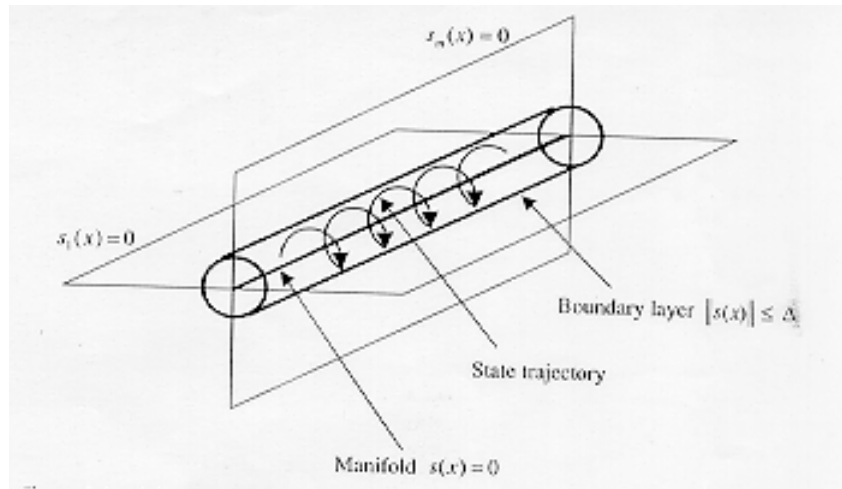


Figura 2.6 Ecuación de modo deslizante por el método de capa del limite.

La idea central del método de regularización de capa del limite es como sigue. Si el limite de la solución para (2.2.8), con $u = u$ y la anchura de la capa del limite tiende a cero, existe y es la única y no depende del tipo de imperfecciones y la forma en que Δ tiende a cero, i.e. esto es independiente del procedimiento del limite en

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t, D) = x^*(t)$$

Entonces la función $x^*(t)$ es tomada como la solución para (2.2.8) con el modo deslizante ideal. Por otra parte, debemos reconocer que las ecuaciones de movimiento mas allá de la variable de discontinuidad no nos permite derivar inequívocamente las ecuaciones para el movimiento en la variable. Los casos particulares de regularización para los sistemas con control escalar discontinuo manejados en esta sección han mostrado que la ecuación (2.2.7) es el modelo “derecho” de modo deslizante. Casos mas generales serán discutidos en la siguiente sección usando la aproximación de limite de capa.

2.3 Método de control equivalente

Desde un punto de vista metodológico es conveniente desarrollar un procedimiento para derivar las ecuaciones de modo deslizante para el sistema (2.2.8) para empezar con un método heurístico y luego, usando la aproximación de regularización de limite de capa, yendo a analizar si las ecuaciones pueden ser tomadas como el modelo de movimiento.

Hemos asumido que el vector de estado inicial de sistema (2.2.8) es en la intersección de todas las superficies de discontinuidad, i.e. en la variable $s(x)=0$, y el modo deslizante ocurre con las trayectorias de estado confinadas a esta variable para $t>0$.

Desde el movimiento en el modo deslizante implica $s(x)=0$ para $t>0$, podemos asumir que $ds/dt = \dot{s} = 0$ es correcto. Por tanto, en adición a $s(x)=0$, y la derivada respecto al tiempo $\dot{s}(x)=0$ puede ser usada para caracterizar las trayectorias de estado durante el modo deslizante. El control de conmutación rápido u es un obstáculo por usar métodos convencionales, pasando por alto las discontinuidades del control y calculando el vector u tal que la derivada respecto al tiempo del vector en las trayectorias de estado de (2.2.8) sea igual a cero:

$$\dot{s}(x) = G \times f(x, u) = 0 \quad (2.3.1)$$

Donde $G = (\nabla s / \nabla x)$ es una matriz $m \times n$ con pendientes de funciones $s_i(x)$ como filas. Permite una solución a la ecuación algebraica (2.3.1) existente. La solución $u_{eq}(x)$ será llamada el *control equivalente*. Esta función continua es sustituida por el control discontinuo u en el sistema original (2.2.8):

$$\dot{x} = f(x, u_{eq}) \quad (2.3.2)$$

Es evidente que para las condiciones iniciales $s(x(0)) = 0$ en complacencia con (2.3.1), mas allá el movimiento es gobernado por (2.3.2) será a lo largo de las trayectorias de estado en la variable $s(x) = 0$, así como para el modo deslizante en el sistema (2.2.8). La ecuación (2.3.2) es tomada como la ecuación de modo deslizante en la intersección de las superficies m de discontinuidad $s_i(x) = 0$, ($i=1, \dots, m$). El procedimiento para derivar la ecuación será llamado método de control equivalente. Desde un punto de vista geométrico, el método de control equivalente significa reemplazar el control discontinuo en la intersección de las líneas conmutadas por un control continuo tal que el vector de velocidad de estado queda en la variable tangencial. Por ejemplo en el sistema con control escalar (2.2.3) este vector puede ser encontrado como la intersección del plano tangencial y del sitio $f(x, u)$ con control u corriendo de u^- a u^+ (Figura 2.7). El punto de intersección define el control equivalente u_{eq} y el lado diestro $f(x, u_{eq})$ en la ecuación de modo deslizante (2.1.2).

Note que el lado diestro de la ecuación $f(x, u_{eq})$ de movimiento resultante del método de control equivalente no coincide con el del método de Filippov (f_{sm} en (2.7) y en la figura 2.5). Son iguales si el sistema (2.2.3) con control escalar es lineal con respecto al control $f(x, u) = f_0(x) + b(x)u$ (f_0 y b son vectores n -dimensionales). Luego el sitio $f(x, u)$ del método de control equivalente (figura 2.7) con un conjunto mínimo convexo (la línea recta que conecta los extremos de los vectores f^- y f^+) del método de Filippov. La discrepancia refleja el hecho de diferentes caminos de regularización encabezan a diferentes ecuaciones de modo deslizante en sistemas con funciones no lineales de entrada de control en las ecuaciones de movimiento (Utkin, 1971/72).

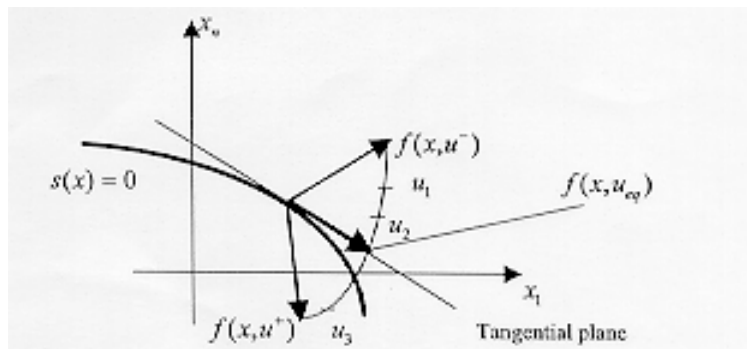


Figura 2.7 Método de control equivalente para sistemas no lineales con control escalar

Hemos aplicado el procedimiento del método equivalente a los llamados sistemas afines, i.e. sistemas no lineales con lados diestros en las ecuaciones de movimiento (2.2.8) como funciones lineales de la entrada de control u :

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad x, f(x) \in \mathbb{R}^n, B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}, u(x) \in \mathbb{R}^m \quad (2.3.3)$$

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{doble componente}) \quad s(x)^T = [s_1(x), \dots, s_m(x)]$$

Similar al sistema (2.2.8), cada superficie $s_i(x)=0$ es el conjunto de puntos de discontinuidad para el correspondiente componente del control u_i .

Ecuación (2.3.1) del método de control equivalente para sistema (2.3.2) es de forma

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \quad \text{donde } G = (\nabla s / \nabla x)$$

Asumiendo que la matriz GB no es singular para cualquier x , encontrar el control equivalente $u_{eq}(x)$ como la solución a (2.3.4):

$$u_{eq}(x) = -(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x)$$

Y substituye $u_{eq}(x)$ en (2.3.3) a rendimiento de la ecuación de modo deslizante como

$$\dot{x} = f(x) - B(x) (G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x)$$

La ecuación (2.3.5) es tomada como la ecuación de modo deslizante en la variable $s(x) = 0$. La ecuación ha sido postulada. De acuerdo a nuestro modelo, la cuestión de si este es un modelo "correcto" del movimiento en el modo deslizante, puede ser respondida involucrando el método de regularización basado en la introducción de un límite capa de la variable $s(x)=0$. para los sistemas afines (2.3.3), la ecuación de modo deslizante es encontrada únicamente en la armazón del método y esta coincide con (2.3.5) resultando del método de control equivalente. Esta declaración se prueba en Utkin (1971/72) bajo suposiciones generales relacionadas con la suavidad y proporción de crecimiento para las funciones f , B , u^+ , u^- , y s . De acuerdo con estos resultados, la condición (2.2.9) de sostenimiento, significara que cualquier solución en la capa del límite $x(t, D)$ tiende a una solución $x^*(t)$ de ecuación (2.3.5) indiferente que el tipo de imperfección causa el movimiento en la capa del límite e indiferente como la capa del límite es reducida a cero.

Formalmente, el método de control equivalente puede ser aplicado a sistemas que son no lineales con respecto al control. El resultado difiere de las ecuaciones del método de Filippov incluso para sistemas con control escalar.

Los esfuerzos por demostrar si este método o aquel método es "correcto" para emplear la regularización aproximada han resultado infructuosos, desde la ecuación de modo deslizante que resulta del procedimiento límite depende de la naturaleza de las imperfecciones introducidas y del camino en que estas tiendan a cero. Por ejemplo, modos deslizantes en sistemas relevados con pequeños retrasos o histéresis en el dispositivo interruptor son gobernados por la ecuación del método de Filippov; pero para una pieza conocida de aproximación suave continua de una función discontinua son gobernadas por la ecuación del método de control equivalente. Utkin(1992) da detalles del análisis de modo deslizante en sistemas no lineales y explica las razones para la ambigüedad.

Cualitativamente, el resultado para sistemas afines puede ser explicado en términos de un diagrama de bloque de sistema (Figura 2.8). En complacencia con el método de control equivalente, la derivada respecto al tiempo de \dot{s} es normalmente

puesto igual a cero (2.3.4). Para el movimiento en un límite de capa, \dot{s} es un valor pequeño de Orden D pero s toma valores finitos y no tiende a cero con D .

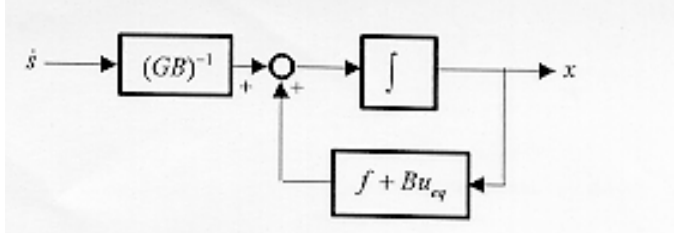


Figura 2.8 Método de control equivalente para sistemas afín.

Esto significa que el control real no satisface a la ecuación (2.3.4) y puede ser encontrada como

$$u = u_{eq} + (GB)^{-1} \dot{s}$$

La ecuación de movimiento en la capa del límite es gobernada por

$$\dot{x} = f + Bu_{eq} + (GB)^{-1} \dot{s}$$

Esto difiere de la ecuación deslizante ideal (2.16) por el término adicional $(GB)^{-1} \dot{s}$.

En términos de diagramas de bloque cualquier sistema dinámico puede ser representado como una serie de integradores y es natural asumir que una salida de cada uno de ellos puede ser estimada por un límite superior de la integral de una entrada.

En nuestro caso la entrada es \dot{s} y su integral s tiende a cero con $D \rightarrow 0$. Por consiguiente la respuesta de esta entrada tiende a cero. Esto explica por que la solución con capa del límite reducido a cero tiende al mismo resultado como la solución a la ecuación derivada usando control equivalente. Por supuesto, este no es el caso para sistemas con funciones no lineales de control en ecuaciones de movimiento; de hecho, generalmente hablando $\int_0^t h(\dot{s}) dt$ no tiende a cero siempre si s lo hace y $h(0)=0$. Por ejemplo, si $s = -(1/w) \cos w t$, $\dot{s} = \sin w t$, entonces s tiende a cero con $w \rightarrow \infty$, pero no $\int_0^t h(\dot{s})^2 dt$. Las Singularidades de las ecuaciones del modo deslizante en sistemas afines explican por que la mayor atención es dada a esta clase en teoría de control de modo deslizante. En aplicaciones practicas los sistemas más comunes son aquellos que son no lineales con respecto al vector de estado y lineales con respecto a la entrada del control.

2.4 Significado físico de control equivalente

El movimiento en el modo deslizante ha sido considerado como una idealización certera. Es asumido que el control cambia a alta, teóricamente infinita, frecuencia tal que el vector de velocidad de estado es orientado precisamente a lo largo de la intersección de superficies discontinuas. Sin embargo, en realidad, varias imperfecciones hacen oscilar el estado en alguna vecindad de la intersección y componentes de control son cambiados a frecuencia finita, alternativamente toma los valores $u_i^+(x)$ y $u_i^-(x)$. Estas oscilaciones tienen alta frecuencia y componentes lentos. La alta frecuencia es filtrada fuera por una planta bajo control mientras su movimiento en modo deslizante es determinado por el componente lento. Por otro lado, las ecuaciones de modo deslizante son obtenidas por sustitución de control equivalente para el control real. Es razonable asumir que el control equivalente esta cerrado al

componente lento del control real el cual puede ser derivada filtrándose fuera la componente de alta frecuencia usando un filtro pasa bajas. Su constante de tiempo debe ser suficientemente pequeña para preservar el componente lento sin distorsionar pero lo suficientemente grande para eliminar la componente de alta frecuencia. Como se muestra en Utkin (1992), el filtro pasa bajas

$$t \dot{z} + z = u$$

tiende al control equivalente

$$\lim_{t \rightarrow 0, \Delta/t \rightarrow 0} z = u_{eq}$$

Esta forma de tender de z a u_{eq} no es algo complicado, pero naturalmente proviene de las propiedades físicas del sistema. De hecho, la vecindad de una variable de discontinuidad de ancho D , donde el estado oscila, debe ser reducido para hacer el movimiento real cerrado para el modo deslizante ideal. Para la reducción de D , la frecuencia de conmutación f de control debe ser incrementada, por otra parte la amplitud de oscilaciones pueden exceder a D donde $D \gg 1/f$. Para eliminar el componente de alta frecuencia del control en modo de deslizante, la frecuencia debe ser mucho más alta que $1/t$, o $1/f \ll t$, entonces $D \ll t$. Finalmente, la constante de tiempo del filtro de pasabajas debe ser realizada para tender a cero a causa de que el filtro no debe distorsionar el componente lento del control. Así las condiciones $t \gg 0$ y $D/t \gg 0$ (lo cual implica $D \gg 0$) debe ser cumplido para extraer el componente lento igual al control equivalente y para filtrar fuera la componente de alta frecuencia.

Es de interés que el control equivalente depende de los parámetros de la planta y las perturbaciones que pueden ser desconocidos. Por ejemplo, nos permitimos asumir que el modo deslizante existe en la línea $s = 0$ en sistema (2.1.1):

$$\ddot{x} = a_2 \dot{x} + a_1 x = u + f(t),$$

$$u = -M \text{sign}(s), \quad s = \dot{x} + cx$$

Donde M , a_1 , a_2 , c son parámetros constantes y $f(t)$ es una perturbación limitada. El control equivalente es la solución a la ecuación $\dot{s} = -a_2 \dot{x} - a_1 x + u + f(t) = 0$ con respecto a u bajo condiciones $s = 0$, o $\dot{x} = -cx$

$$u_{eq} = (-a_2 c + a_1)x - f(t)$$

El control equivalente depende de los parámetros a_1 , a_2 y la perturbación $f(t)$. Extrayendo con control equivalente con un filtro pasabajas, esta información puede ser obtenida y usada para mejorar el desempeño del sistema de control de retroalimentación. Además, esta oportunidad puede ser usada en el capítulo 6 para diseñar observadores de estado con modos deslizantes y en el capítulo 8 para la supresión del chattering.

2.5 Condiciones de existencia

Los métodos desarrollados en la sección previa nos habilita para apuntar que la ecuación de modo deslizante debe ocurrir en un sistema. Si el modo deslizante exhibe las propiedades dinámicas deseadas el control debe ser diseñado tal que este movimiento es forzado. Las condiciones del modo deslizante para existir debe ser derivado del segundo problema matemático en el análisis del modo deslizante como un fenómeno. Para sistemas con control escalar estudiados en los capítulos 1 y 2, las

condiciones fueron obtenidas desde consideraciones geométricas: la desviación de la superficie interruptora s y su derivada respecto al tiempo deben tener signos opuestos en la vecindad de una superficie de discontinuidad $s = 0$, o (Barbashin, 1967)

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} < 0 \quad \lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} > 0 \quad (2.4.1)$$

Para el sistema (1.2.1) el dominio de modo deslizante (sector m - n en la línea conmutada en figura 1.7) es encontrado basándose en consideraciones geométricas. Puede ser encontrado analíticamente en (2.4.1) como

$$\dot{s} = (-c_2 + a_2 c - a_1)x - M \operatorname{sign}(s) + f(t)$$

y el dominio del deslizante para la perturbación limitada $|f(t)| < f_0$ esta dada por

$$|x| = \frac{M - f_0}{|-c^2 + a_2 c - a_1|}$$

Como fue demostrado para el sistema (2.1.2), la existencia del modo deslizante en una intersección de un conjunto de superficies de discontinuidad $s_i(x) = 0$, ($i = 1, \dots, m$) no es necesario cumplir desigualdades (2.4.1) para cada uno de ellos. Estos sistemas ha mostrado que las trayectorias convergen en la variable $s^T = [s_1, \dots, s_m] = 0$ y lo alcance después de un intervalo de tiempo finito, similar a los sistemas con control escalar. El termino “converge” significa que tratamos con el problema de estabilidad del origen en un subespacio m -dimensional (s_1, \dots, s_m) , por consiguiente las condiciones de existencia pueden ser formuladas en términos de la teoría de estabilidad.

En adición, *convergencia de tiempo finito* toma lugar. Esta condición no tradicional es importante para distinguir sistemas con modos deslizantes de sistemas continuos con trayectorias de estado convergiendo a alguna variable asintoticamente. Por ejemplo las trayectorias de estado del sistema $\ddot{x} - x = 0$ converge a la variable $s = \dot{x} - x = 0$ asintoticamente desde $\dot{s} = -s$; sin embargo, apenas seria razonable llamar al movimiento en $s=0$ “modo deslizante”.

A continuación, examinaremos las condiciones para que el modo deslizante exista en sistemas afines (2.3.3). Para derivar las condiciones, necesitamos analizar la estabilidad de la proyección de movimiento en el subespacio s gobernado por la ecuación diferencial

$$\dot{s} = Gf + GBu \quad (2.4.2)$$

El control (2.3.3)

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{doble componente}) \quad s(x)^T = [s_1(x), \dots, s_m(x)]$$

puede ser representado como

$$u(x) = u_d(x) + U(x)\operatorname{sign}(s) \quad (2.4.3)$$

donde $u_d(x) = 1/2(u^+(x) + u^-(x))$, $U(x)$ es una matriz diagonal con elementos $U_i(x) = 1/2(u_i^+(x) - u_i^-(x))$ para $i=1, \dots, m$ y la señal(s) del control discontinuo toma la forma de una función de señal de doble componente

$$\operatorname{sign}(s)^T = [\operatorname{sign}(s_1) \dots \operatorname{sign}(s_m)] \quad (2.4.4)$$

Entonces la proyección de movimiento en el subespacio s es gobernada por

$$\dot{s} = d(x) - D(x)\text{sign}(s) \text{ con } d = Gf + GBu_0, D = -GBU \quad (2.4.5)$$

Para encontrar las condiciones de estabilidad del origen $s=0$ para el sistema no lineal (2.4.5), i.e. las condiciones para que el modo deslizante exista, seguiremos la metodología estándar para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales – trataremos de encontrar una función de *Lyapunov*. Al mismo tiempo, debemos recordar que el lado diestro en la ecuación de movimiento es discontinuo y no definido en los puntos donde los argumentos de las funciones de signo son iguales a cero. Para ilustrar el problema necesita un tratamiento sutil, permítanos volver al sistema (2.1.2) en la sección 2.1 con la ecuación de la proyección del movimiento en el subespacio (s_1, s_2) dado por

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\text{sign } s_1 + 2 \text{ sign } s_2 \\ \dot{s}_2 &= -2 \text{ sign } s_1 + \text{sign } s_2 \end{aligned}$$

La derivada respecto al tiempo de la función candidata definida positiva de la función de Lyapunov $V = |s_1| + |s_2|$ a lo largo de las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} \dot{s}_2 = \text{sign}(s_1)(-\text{sign}(s_1) + 2\text{sign}(s_2)) \\ &+ \text{sign}(s_2)(-2\text{sign}(s_1) + \text{sign}(s_2)) = -2 \end{aligned}$$

Es definido negativo y podemos concluir que el plano de estado (s_1, s_2) es asintóticamente estable. La figura 2.1 muestra que este es el caso. El tiempo necesitado por el estado para alcanzar el origen es calculado como $T = V(0)/|\dot{V}| = V(0)/2 = |s_2(0)|/2$ para la condición inicial $s_1(0)=0, s_2(0) \neq 0$. El resultado coincide con el tiempo de alcance encontrado por el método de transformación punto a punto en la sección 2.1.

Sin embargo la conclusión de la estabilidad asintótica hecha para el sistema (2.1.2) no es siempre correcta. La derivada respecto al tiempo de la función candidata definido positivo de la función de Lyapunov

$$V = 4|s_1| + |s_2|$$

A lo largo de las trayectorias de otro sistema

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -2 \text{ sign } s_1 - \text{sign } s_2 \\ \dot{s}_2 &= -2 \text{ sign } s_1 + \text{sign } s_2 \end{aligned}$$

es negativo

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} \dot{s}_2 = -7 - 6\text{sign}(s_1)\text{sign}(s_2)$$

En todas partes excepto en las superficies de discontinuidad. Pero no testifica la estabilidad. El plano del estado en la figura 2.9 muestra que las trayectorias de estado alcanzan el plano $s_1=0$ en que el modo deslizante ocurre (las condiciones de existencia (2.4.1) contienen en este plano). Siguiendo el método de control equivalente, la ecuación de movimiento puede ser obtenida encontrando $[\text{sign}(s_1)]_{eq}$ de la ecuación $\dot{s} \neq 0$ y sustituyéndola en la segunda ecuación. Estos resultados en la ecuación deslizante $\dot{s}_2 = 2\text{sign}(s_2)$ con solución inestable y s_2 tendiendo a infinito.

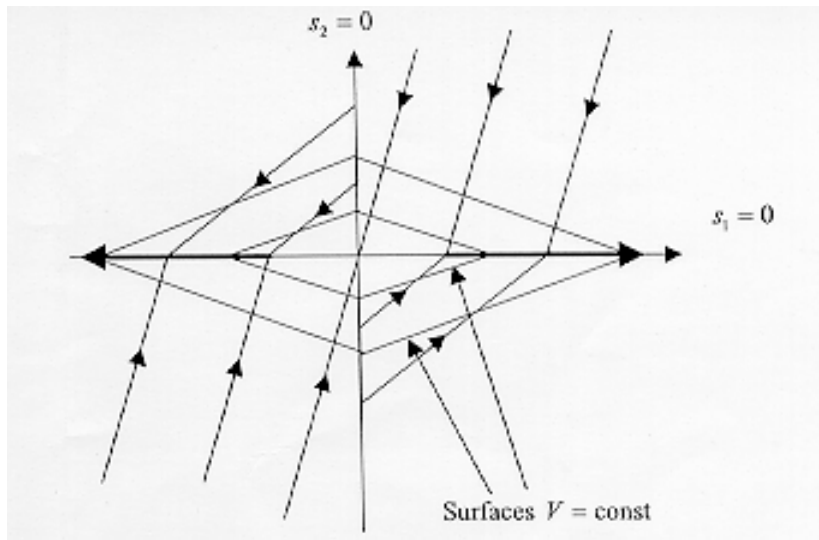


Figura 2.9 El plano s para el sistema con control bi-dimensional

La inestabilidad en el movimiento a lo largo del plano $s_1=0$ significa que el modo deslizante no ocurre en la intersección de las superficies de discontinuidad $s_1=0$ y $s_2=0$. Las trayectorias interceptan las superficies $V=\text{const}$ de afuera en todas partes excepto por los puntos de la esquina con $s_1=0$, y las trayectorias de modo deslizante en $s_1=0$ diverge a través de estos puntos. En la figura 2.1, que muestra las trayectorias de estado para el sistema (2.1.2), el modo deslizante no ocurre en ninguna de las superficies de discontinuidad, por consiguiente los puntos de discontinuidad de los lados diestros en las ecuaciones de movimiento son aislados. Esta es la razón para la disminución de la función de Lyapunov; también explica la diferencia de los signos en V y \dot{V} , sugiriendo estabilidad asintótica del origen en el subespacio (s_1, s_2) , y la existencia del modo deslizante en la intersección de los planos $s_1=0$ y $s_2=0$. Por tanto, como es mostrado en la figura 2.9, el conocimiento de los signos de una función suave y su derivada, generalmente hablando, no es suficiente para determinar la existencia del modo deslizante.

Para ser capaces de usar la función de Lyapunov en la forma de la suma de valores absolutos siempre que el modo deslizante ocurra en alguna de las superficies de discontinuidad, los componentes correspondientes del control discontinuo deben ser remplazados por sus equivalentes y solo entonces debe ser encontrada la derivada de tiempo de la función de Lyapunov.

Definición 2.1

El conjunto $S(x)$ en la variable $s(x)=0$ es el dominio del modo deslizante si, para el movimiento gobernado por la ecuación (2.4.5), el origen en el subespacio s es asintóticamente estable con convergencia de tiempo finita para cada x de $S(x)$.

Definición 2.2

La variable $s(x)=0$ es llamada variable deslizante si el modo deslizante existe en cada punto, o $S(x)=\{x:s(x)=0\}$.

Teorema 2.1

Si la matriz D en la ecuación

$$\dot{s} = -D \text{sign}(s) \quad (2.4.6)$$

Es definida positiva

$$D + D^T > 0 \quad (2.4.7)$$

Entonces el origen $s=0$ es un punto de equilibrio asintoticamente estable con convergencia de tiempo finita.

Prueba

Permitiéndonos la suma de valores absolutos de s_i

$$V = \text{sign}(s)^T s > 0 \quad (2.4.8)$$

Es una función candidato de Lyapunov.

Descomposición del vector s en dos subvectores $s^T = (s^k)^T (s^{m-k})^T$, asumiendo que el modo deslizante ocurre en la intersección de k superficies de discontinuidad, $s^k=0$, y los componentes del vector s^{m-k} son diferentes de cero.

De acuerdo al método de control equivalente, el vector $\text{sign}(s^k)$ en la ecuación de movimiento debe ser reemplazado por la función $(\text{sign}(s^k))_{eq}$ tal que $\dot{s}^k=0$. Desde $s^k=0$ en el modo deslizante, la derivada de tiempo de V en (2.4.8) consiste de $(m-k)$ términos:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} ((\text{sign}(s^{m-k}))^T s^{m-k}) \text{sign}(s^k) = (\text{sign}(s^{m-k}))^T \dot{s}^{m-k}$$

El valor de $(\text{sign}(s^k))^T \dot{s}^k$ es igual a cero en el modo deslizante, por consiguiente

$$\dot{V} = (\text{sign}(s^k))^T_{eq} \dot{s}^k + (\text{sign}(s^{m-k}))^T \dot{s}^{m-k}$$

Remplazando el vector \dot{s} con su valor de (2.4.6) con el vector $\text{sign}(s^k)$ substituido por $(\text{sign}(s^k))_{eq}$ tenemos

$$\dot{V} = -z^T D z = -z^T \frac{D + D^T}{2} z$$

Donde $z^T = (\text{sign}(s^k))^T_{eq} (\text{sign}(s^{m-k}))^T$ y la matriz D es definida positiva (2.4.7),

$\dot{V} \leq -\lambda_{min} \|z\|^2$, $\lambda_{min} > 0$ son los mínimos valores de eigenvalores de la matriz $\frac{1}{2}(D + D^T)$,

$\|z\| = \sqrt{z^T z}$. (Generalmente hablando, $Q = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$ pero $z^T Q z = z^T [\frac{1}{2}(Q + Q^T)] z$.)

En el tiempo inicial, por lo menos uno de los componentes del vector s es diferente de cero, por lo tanto uno de los componentes del vector z es igual a +1 o -1, $\|z\| \geq 1$ y la función de Lyapunov (2.4.8) decae a una proporción finita.

$$\dot{V} \leq -\lambda_{min} \quad (2.4.9)$$

La Condición (2.4.9) significa que V y el vector s desaparecen después de un intervalo de tiempo finito y el origen $s=0$ es un punto de equilibrio asintoticamente estable con convergencia de tiempo finita.

En esta sección fueron estudiados dos sistemas de segundo orden. Para ambos las derivadas de tiempo de definido positivo de las funciones de Lyapunov de tipo "suma de valores absolutos" fueron definidos negativos en todas partes excepto en las superficies de discontinuidad. Para el primer sistema de segundo orden en esta sección

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz $D + D^T > 0$ es definido positivo, que testifica a estabilidad (Figura 2.1). El segundo sistema con

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

es inestable (Figura 2.9) y matriz

$$D + D^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

No es definido positivo.

La estabilidad suficiente (o existencia del modo deslizante) condición formulada en el teorema 2.1 para el sistema (2.4.6) puede ser generalizada fácilmente para los casos (2.4.2) o (2.4.5). Para que $s(x)=0$ sea una variable deslizante, es suficiente que para cualquier $x \in S$, $S = \{x : s(x)=0\}$

$$\begin{aligned} D(x) + D^T(x) &> 0 \\ I_0 &> d_0 \sqrt{m} \quad \text{con} \quad I_{\min}(x) > I_0 > 0 \\ \|d(x)\| &< d_0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Donde $I_{\min}(x)$ es el eigenvalor mínimo de $\frac{1}{2}(D + D^T)$, I_0 es un valor positivo constante, d_0 es una estimación superior del vector $d(x)$ en (2.4.5).

La derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov (2.4.8) a lo largo de las trayectorias (2.4.2) tienen una forma similar a (2.4.9):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -z^T d(x) = -z^T \frac{D + D^T}{2} z \\ &\leq \|z\| \|d(x)\| - I_{\min} \end{aligned}$$

Los componentes del vector z son cualquiera de $\text{sign}(s_i)$ o $(\text{sign}(s_i))_{eq}$. Como se muestra en la sección 2.3, el control equivalente es un valor promedio del control discontinuo, y su valor es una función continua variando entre los dos valores extremos del control discontinuo. Esto significa que $|(\text{sign}(s_i))_{eq}| \leq 1$, de la norma del vector m -dimensional z con componentes del rango ± 1 que no exceda \sqrt{m} y

$$\forall d_0 \sqrt{m} - I_0 < 0 \quad (2.4.11)$$

Desde que la función de Lyapunov decae a una proporción finita, desaparece y el modo deslizante ocurre después de un intervalo finito de tiempo.

Comentario 2.1

Si la desigualdad (2.4.11) sostiene cualquier x entonces es simultánea la condición de alcance, i.e. la condición para que el estado alcance la variable deslizante desde cualquier punto inicial.

Comentario 2.2

Estimaciones superiores e inferiores de $d(x)$ y $I_{min}(x)$, respectivamente, pueden depender de x . Entonces la condición para que la variable deslizante exista y la condición de alcance es de la forma

$$\dot{V} \leq \|d(x)\| \sqrt{m} - I_{min}(x) < -v_0 \quad (2.4.12)$$

Donde v_0 es una constante positiva.

€

comentario 2.3

Las funciones $d(x)$ y $D(x)$ dependen del control (2.4.3) y (2.4.5). El valor de $I_{min}(x)$ puede ser incrementado por incrementos de la diferencia entre $u_i^+(x)$ y $u_i^-(x)$ sin variar $u_0(x)$ y $d(x)$. Entonces la condición (2.4.11) o (2.4.12) puede ser cumplida.

€

comentario General del Capitulo 2

Cuando estudiamos las ecuaciones de modos deslizantes y las condiciones para que este movimiento exista, solo se manejaron sistemas de tiempo invariante, pero todos los resultados son validos para sistemas de tiempo variante como correctos. La diferencia para una variable conmutada de tiempo variante $s(x,t)=0$ es que para encontrar el control equivalente, la ecuación (2.3.4) debe ser complementada por un termino adicional $\|s(x, t)\| t$:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} + \|s(x, t)\| t = 0$$

Y su solución $u_{eq} = -(GB)^{-1}(Gf + \|s\| t)$ debe ser sustituido en (2.3.3) indiferente a las funciones f y B en la ecuación de movimiento (2.3.3) depende del tiempo o son invariante en el tiempo.

€

Referencias

- ANDRE, J. Y SEIBERT, P., 1956 Über Stückweise Lineare Differential-Gleichungen, die bei Regelungsproblemen Auftreten I, II (in German), *Archiv der Math.*, 7, 2-3.
- BARBASHIN, E., 1967, *Introduction to the theory of Stability* (in Russian), Moscow: Nauka.
- FILIPPOV, A., 1988, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Dordrecht: Kluwer.
- UTKIN, V., 1971/72, Ecuaciones de regimenes durmiendo en sistemas discontinuos I, II, *Automation and Remote Control*, **32**, 1897-1907 y **33**, 211-19.
- UTKIN, V., 1992, *Sliding Modes in Control and Optimization.*, Berlin: Springer Verlag.