

Figura 9.5 El control en modos deslizantes discreto para sistemas con incertidumbres en parámetros. Los instantes de muestreo están marcados con pequeños círculos. El control u_k se selecciona como $-u_0 \leq u_k \leq u_0$ en cada instante de muestreo tal que $s(x_{k+1})$ se acerque a la vecindad de los modos deslizantes en un intervalo de tiempo finito y permanece en la región sin presentar movimientos vibratorios..

control real $u(x, t)$ en (9.5.2) para asegurar esta suposición sosteniendo los modos deslizantes en el segundo bloque a través de la región $s_0 = \{x : z - z_d = 0\}$. En el sistema global (9.5.1), (9.5.2) los modos deslizantes existen en la intersección de ambas regiones como se describe en $s \cap s_0$.

9.2 Sistemas lineales con retardos

Este sistema trata con sistemas lineales con parámetros desconocidos en analogía a la sección 9.3. La extensión a sistemas con parámetros desconocidos sigue un procedimiento semejante al de sistemas de tiempo discreto de la sección 9.4 y se omite aquí.

Como un ejemplo considere un sistema lineal invariante en el tiempo con un retardo en la variable de entrada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (9.6.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t > 0$ y las condiciones iniciales denotadas por $x(0) = x_0$ y $u(x) = u_0(x)$ para $-\tau < x < 0$. El sistema (9.6.1) puede ser representado en bloque de ecuaciones de diferencia y diferenciales (9.5.1), (9.5.2) mediante $A_{11} = A$, $A_{12} = B$, $A_{21} = 0_{m \times n}$, $A_{22} = 0_{m \times m}$ y $B_0 = I_{m \times m}$:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \quad (9.6.2)$$

$$z(t) = u(t - \tau) \quad (9.6.3)$$

Primeramente, diseñar una función continua $S(x) = (s_1(x), \dots, s_i(x), \dots, s_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ y un control discontinuo $z_d = (z_{d_1}(x), \dots, z_{d_i}(x), \dots, z_{d_m}(x)) \in \mathbb{R}^m$ con los componentes:

$$z_{d_i}(x(t)) = \begin{cases} z_{d_i}^+(x(t)) & \text{para } s_i(x(t)) > 0 \\ z_{d_i}^-(x(t)) & \text{para } s_i(x(t)) < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (9.6.4)$$

tal que, después de un intervalo de tiempo finito, cada trayectoria pertenece a la inserción $S = \bigcap_{i=1}^m S_i$ de las superficies $S_i = \{x : s_i(x) = 0\}$ y posteriormente aparecen los modos deslizantes. Segundo, para implementar el control en (9.6.4) en (9.6.2), se asigna:

$$u(t) = z_d(x(t + \tau)) \quad (9.6.5)$$

para (9.6.3) y obligar la aparición de los modos deslizantes en la región $S_0 = \{x : z - z_d = 0\}$. Los valores de $x(t + \tau)$ deben de extrapolarse desde la solución en (9.6.2) como:

$$x(t + \tau) = e^{A\tau}x(t) + \int_0^\tau e^{A(t-x)}Bu(t-x)dx \quad (9.6.6)$$

Observe que el control $u(t)$ necesita estar almacenado en el microcontrolador para el intervalo de tiempo $[t, t + \tau]$.

De forma semejante a los sistemas de tiempo discreto discutidos en la sección 9.2 y 9.4, el control $u(t)$ está diseñado para que cumpla $z(t + \tau) = z_d(t + \tau)$ en algún punto futuro, t delante de un instante de tiempo corriente t . En contraste a los sistemas de tiempo discreto, el tiempo t es continuo en lugar de los $k\Delta t$ instantes de tiempo discretos.

El movimiento del sistema en (9.6.2), (9.6.3) en los modos deslizantes a través de la región s_0 se describe mediante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bz_d(x(t)) \quad (9.6.7)$$

Una vez que los modos deslizantes aparecen en la intersección $s = \cap_{i=1}^m s_i$ mediante el diseño de (9.6.4), los modos deslizantes existen en la intersección de todas las $(m-1)$ regiones de deslizamiento $\sum = s \cap s_0 = \cap_{i=0}^m s_i$ con la dinámica deseada del sistema (9.6.1).

9.7 Sistemas distribuidos

En esta sección discute el ejemplo de un sistema distribuido de un eje móvil. Debido a que los sistemas distribuidos pueden ser descritos mediante ecuaciones de diferencia y diferenciales como en los sistemas con retardo, se empleará la metodología de diseño de la sección 9.6.

Considerando un eje flexible con longitud l y carga inercial J actuando como una barra de torsión (figura 9.6). Sea $e(t)$ la coordenada absoluta del límite izquierdo de la flecha con la entrada del torque M y permita que $d(x, t)$ sea la desviación relativa localizada en $0 < x < l$ para el tiempo t . Debido a que la desviación absoluta de un punto $0 < x < l$ en el tiempo t esta descrito por $q(x, t) = e(t) + d(x, t)$ y gobernado por:

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \quad (9.7.1)$$

donde a es la constante de flexibilidad que depende de la geometría y del material de la barra. Las condiciones correspondientes a los límites a la entrada del torque M y la inercia de la carga J es:

$$M = -a^2 \frac{\partial q(0, t)}{\partial x} \quad J \frac{\partial^2 q(l, t)}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^2 q(l, t)}{\partial x^2} \quad (9.7.2)$$

Considere el torque de salida M como la entrada de control $u(t)$ y la posición de la carga $q(l, t)$ como la salida del sistema. Para encontrar la función de transferencia $W(p)$ mediante la transformada de Laplace, suponga las condiciones iniciales:

$$q(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial q(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (9.7.3)$$

para encontrar:

$$\begin{aligned} a^2 Q(0, p) &= -U(p) \\ p^2 Q(x, p) &= a^2 Q''(x, p) \end{aligned}$$

$$a^2 Q'(l, p) = -Jp^2 Q(l, p)$$

donde $Q(x, p)$ denota la transformada de Laplace de $q(x, t)$ con las derivadas espaciales $Q'(x, p) = \partial Q(x, p) / \partial x$ y $Q''(x, p) = \partial^2 Q(x, p) / \partial x^2$, y $U(p)$ representa la transformada de Laplace de la variable de entrada $u(t)$. La solución al problema del valor límite (9.7.4) está dada por:

$$Q(x, p) = - \frac{\left(1 - \frac{J}{a} p\right) e^{-\frac{l-x}{a} p} + \left(1 + \frac{J}{a} p\right) e^{\frac{l-x}{a} p}}{ap \left(- \left(1 - \frac{J}{a} p\right) e^{-\frac{l}{a} p} + \left(1 + \frac{J}{a} p\right) e^{\frac{l}{a} p} \right)} U(p) \quad (9.7.5)$$

para lo cual $W(p)$ puede ser obtenido mediante la asignación $x = l$ para obtener:

$$W(p) = \frac{2e^{-tp}}{ap \left(1 + \frac{J}{a} p \right) + \left(1 - \frac{J}{a} p \right) e^{-2tp}} \quad (9.7.6)$$

donde $t = l/a$ describe el retardo entre las secciones límite a la izquierda y derecha de la barra. La ecuación de diferencia y diferencial correspondiente puede ser escrita en la forma:

$$J \ddot{q}(t) + J \ddot{q}(t-t) + a \dot{q}(t) - a \dot{q}(t-2t) = 2u(t-t) \quad (9.7.7)$$

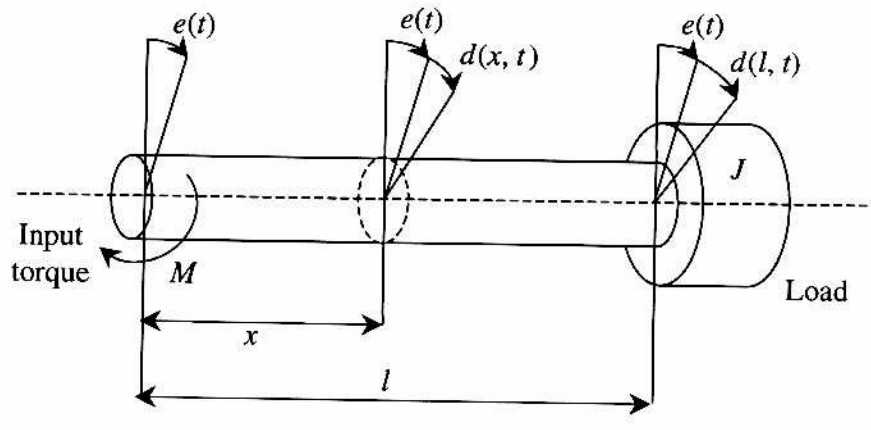


Figura 9.6 Una flecha flexible con un torque de entrada M y una carga J actuando como una barra en torsión.

Denotando $x_1(t) = q(t)$, $x_2(t) = \dot{q}(t)$ y $z(t) = J\ddot{q}(t) + a\dot{q}(t)$, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -(ax_2(t) + z(t)) / J \end{aligned} \quad (9.7.8)$$

$$z(t) = 2ax_2(t - 2t) - z(t - 2t) + 2u(t - t) \quad (9.7.9)$$

lo cual corresponde a la estructura en el bloque (9.5.1), (9.5.2). En el primer paso de diseño, se asigna el control deseado $z_d(t)$ para el primer bloque:

$$z_d(t) = -M \operatorname{sign}(kx_1(t) + x_2(t)) \quad (k > 0) \quad (9.7.10)$$

a fin de alcanzar $z(t) = z_d(t)$ en el segundo paso de diseño, seleccionando la entrada de control $u(t)$ como:

$$u(t) = u_{eq}(t) = \frac{1}{2}(-2ax_2(t - t) + z(t - t) - M \operatorname{sign}(kx_1(t + t) + x_2(t + t))) \quad (9.7.11)$$

La región $s(t) = z_d(t) - z(t) = 0$ se alcanza dentro de un intervalo finito de tiempo $t < t$ y posteriormente aparecen los modos deslizantes.

Si el control $u(t)$ esta acotado por $|u(t)| \leq u_0$, se selecciona:

$$u(t) = \begin{cases} u_{eq}(t) & \text{para } |u_{eq}(t)| \leq u_0 \\ u_0 \operatorname{sign}(u_{eq}(t)) & \text{para } |u_{eq}(t)| > u_0 \end{cases} \quad (9.7.12)$$

y existe un dominio abierto conteniendo el origen del espacio de estado del sistema en (9.7.8), (9.7.9) tal que para todas las condiciones iniciales en este dominio, los modos deslizantes aparecen en la región $s(t) = 0$. Los valores de $x_1(t + t)$ y $x_2(t + t)$ tienen que ser calculados como la solución de (9.7.8) con la entrada conocida $z(t)$ desde (9.7.9), como se muestra en (9.6.6). Si solamente la salida $y(t) = x_1(t)$ esta disponible, pero no su derivada $\dot{y}(t) = x_2(t)$,

deberá de utilizarse un observador asintótico para estimar el estado $x_2(t)$. Para mayor detalles del control en modos deslizantes para sistemas con retardos y para sistemas distribuidos, observe Drakunov y Utkin (1990) o Utkin (1993).

9.8 Resumen

El amplio uso de los controladores digitales ha creado la necesidad de digitalizar el concepto de los modos deslizantes en los sistemas de control en tiempo discreto, para lo cual aparece la pregunta fundamental: ¿Qué son los modos deslizantes en un sistema de tiempo discreto? La discontinuidad de un control en un sistema de tiempo continuo puede resultar en los modos deslizantes en alguna región del espacio de estado, donde resulta en vibración en la implementación en tiempo discreto. De aquí primeramente se define la esencia de los modos deslizantes, constituyendo un concepto general. Los modos deslizantes existen si las trayectorias del sistema alcanzan esta región en un tiempo finito y posteriormente permanecen dentro. Matemáticamente hablando, la trayectoria de un sistema en modos deslizantes no es invertible, i.e. después de que los modos deslizantes han ocurrido, es imposible encontrar el momento y la ubicación del espacio de estado donde los modos deslizantes iniciaron, y es imposible de obtener el seguimiento de la trayectoria hacia atrás de este punto.

Siguiendo esta definición, los modos deslizantes pueden ser generados en sistemas de tiempo discreto usando una entrada de control continuo. Los métodos de diseño han sido desarrollado en este capítulo y se extendieron a sistemas distribuidos y con retardos. La dinámica general se divide en movimiento parcial independiente de menor dimensión y baja sensibilidad en sistemas con incertidumbre. Para todos los sistemas, el movimiento de las trayectorias están libres de vibración. En el pasado, la vibración discretizante ha sido el mayor obstáculo para ciertas aplicaciones de acción de control discontinuo en sistemas gobernados por ecuaciones discretas y de diferencia.

Referencia

- Drakunov, S. V. Y Utkin, V. I., 1990, La dinámica de los sistemas en modos deslizantes, *International Journal of Control*, 55, 1029-37.
- Drakunov, S. V. et. al., 1990, El principio del control de bloque I, II, *Automation and Remote Control*, 51, 601-9 y 52, 737-46.
- Kotta, U., 1989, observaciones en la estabilidad del control con los modos deslizantes en tiempo discreto, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34, 1021-22.
- Utkin, V. I., 1993, Control en modos deslizantes en tiempo discreto y sistemas de diferencia, en Zinober, A. (Ed.) *Variable Structure and Lyapunov Control*, London: Springer-Verlag.